Lösning till problemet april 2002

En gemensam delare till a och b delar också

$$\begin{aligned} 29^2a - b &= 29^2 31^{19} - 31^{17} = 31^{17}\left(29^2 31^2 - 1\right) = 31^{17}(29\cdot 31 - 1)(29\cdot 31+1) \\ &= 31^{17}(30^2-1-1)(30^2-1+1) = 31^{17} 898\cdot 900 = 2^3 3^2 5^2 31^{17} 449 \end{aligned}$$

Här är 449 ett primtal. Då 31^{17} inte delar b kan endast primtalen $2, 3, 5$ och 449 ingå i en gemensam delare. Enligt binomialsatsen är (med faktoriseringen $30 = xy$)

$$\begin{aligned} b &= (xy-1)^{19} + (xy+1)^{17} \\ &= -1 + 19xy - 171x^2y^2 + \text{heltal} \times x^3y^3 \\ &+ \; 1 + 17xy + 136x^2y^2 + \text{heltal} \times x^3y^3 \\ &= 2^2 3^2 xy - 5\cdot 7x^2y^2 + \text{heltal} \times x^3y^3 \end{aligned}$$

Analoga räkningar ger

$$a = 2^2 3^2 xy + 5\cdot 7x^2y^2 + \text{heltal} \times x^3y^3$$

Insättning av $x = 2$ och $y = 15$ ger

$$a = 35\cdot 15^2 2^2 + \text{heltal} \times 2^3 \text{ och } b = -35\cdot 15^2 2^2 + \text{heltal} \times 2^3$$

Analogt ger $x = 3$ och $y = 10$

$$a = 35\cdot 10^2 3^2 + \text{heltal} \times 3^3 \text{ och } b = -35\cdot 10^2 3^2 + \text{heltal} \times 3^3$$

som visar att potenserna 2^2 och 3^2, men inte 2^3, ingår som faktorer i den gemensamma delaren.
Slutligen ger valet $x = 5$ och $y = 6$

$$a = 2^3 3^3 5 + \text{heltal} \times 5^3 \text{ och } b = 2^3 3^3 5 + \text{heltal} \times 5^3$$

varav följer att 5, men inte 5^2, ingår som faktor i den gemensamma delaren.
Återstår att undersöka primfaktorn 449.
Ur divisionsalgoritmen $31^2 = 961 = 2\cdot 449 + 63$ följer att division av 31^{16} med 449 ger resten $63^8 = 3^8 21^8$. Relationen $3^8 = 6561 = 15\cdot 449 - 174$ visar att 3^8 ger resten -174 vid division med 449. Av identiteten $21^8 = 441^4 = (449-8)^4$ följer att 21^8 och $8^4 = 4096 = 9\cdot 449 + 55$ har samma rester vid division med 449 och att denna är 55. Då $-174\cdot 55 = -9570 = -21\cdot 449 - 141$ blir, vid division med 449, resten för 31^{16} lika med -141 och för 31^{17} lika med resten för $31(-141) = -4371 = -10\cdot 449 + 119$ dvs 119.
För potensen 29^{19} ser motsvarande kalkyler ut så här:

$$\begin{aligned} 29^{19} &= 29(29^3)^6 = 29(24389)^6 = 29(54\cdot 449 + 143)^6 \\ 29\cdot 143^6 &= 29(143^3)^2 = 29(2924207)^2 = 29(6513\cdot 449 - 130)^2 \\ 29\cdot 130^2 &= 29\cdot 16900 = 29(37\cdot 449 + 287) \\ 29\cdot 287 &= 8323 = 18\cdot 449 + 241 \end{aligned}$$

Resten blir alltså 241 vid division av 29^{19} med 449
Resten för $b = 29^{19} + 31^{17}$ blir då $119 + 241 = 360 \neq 0$ som visar att 449 inte finns som faktor i b.

Svar: Största gemensamma delare är $2^2 3^2 5 = 180$