Lösning till problemet augusti 2002

Sätt

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m)} \quad \text{och} \quad b_k = \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m-1)}.$$

Då är $b_k = (k+m)a_k \geq (1+m)a_k$ med likhet då och endast då $k = 1$. Summation ger då $\sum_{k=1}^{n} b_k \geq (m+1)\sum_{k=1}^{n} a_k$ (med likhet då och endast då $n = 1$) och den vänstra olikheten är bevisad.

Nu är $ka_k = b_{k+1}$ och identiteterna $b_k = (k+m)a_k$ kan skrivas $b_k - b_{k+1} = ma_k$. Summation ger då

$$\frac{1}{m!} - \frac{n!}{(n+m)!} = b_1 - b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = m\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Om m ersätts med $m-1$ övergår a_k i b_k och den redan visade formeln ger

$$\frac{1}{(m-1)!} - \frac{n!}{(n+m-1)!} = (m-1)\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Men då är

$$\begin{aligned}
\frac{m-1}{m}\sum_{k=1}^{n} b_k &= \frac{1}{m!} - \frac{n!}{m(n+m-1)!} = \frac{1}{m!} - \frac{n!}{(n+m)!} + \frac{n!}{(n+m)!} - \frac{n!}{m(n+m-1)!} \\
&= m\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{n!}{(n+m)!}\left(1 - \frac{n+m}{m}\right) = m\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{nb_{n+1}}{m} \\
&= m\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{n^2 a_n}{m} < m\sum_{k=1}^{n} a_k.
\end{aligned}$$

Därmed är högra olikheten bevisad.

Man kan aldrig få likhet i högra olikheten för ett ändligt n. Men serierna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är båda konvergenta med värdena $\frac{1}{m \cdot m!}$ och $\frac{1}{(m-1)\cdot(m-1)!}$. Kalkylerna ovan ger

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \frac{m^2}{m-1} - \frac{n^2 a_n}{(m-1)\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

ch då $n^2 a_n = \frac{1}{n^{m-1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{m}{n}\right)}$ går avtagande mot 0 med n och $\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{n^2 a_n}{m}$ är växande, växer kvoten $\sum_{k=1}^{n} b_k / \sum_{k=1}^{n} a_k$ från $m+1$ till $\frac{m^2}{m-1}$ då n går från 1 till ∞.

Svar: Likhet gäller i den vänstra olikheten då och endast då $n = 1$. Likhet inträffar aldrig i den högra olikheten, men begränsningen uppåt kan inte förbättras.