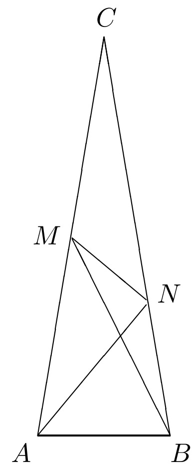
Lösning till problemet december 2002

Lösning



Basvinklarna vid A och B är båda lika med $80°$. Detta ger $\angle AMB = 180° - 80° - 60° = 40°$, $\angle ANB = 180° - 80° - 50° = 50°$, och $\angle NBM = 180° - 20° - 140° = 20°$. Triangeln ABN är alltså likbent med $|AB| = |BN|$. Om $x = \angle BMN$ ger sinussatsen på trianglarna AMB och NMB:

$$\frac{|AB|}{\sin 40°} = \frac{|MB|}{\sin 80°} \qquad \text{och} \qquad \frac{|BN|}{\sin x} = \frac{|MB|}{\sin(160° - x)}.$$

Den första ekvationen ger $|MB| = |AB| \sin 80° / \sin 40° = 2|AB| \cos 40° = 2|BN| \cos 40°$, som insatt i den andra ger (efter division med $|BN|$)

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{2\cos 40°}{\sin(160° - x)}$$

eller

$$2\cos 40° \sin x = \sin(160° - x) = \sin(20° + x) = \sin 20° \cos x + \cos 20° \sin x.$$

Nu är

$$2\cos 40° = 2\sin 50° = 2\sin(30° + 20°) = 2\sin 30° \cos 20° + 2\cos 30° \sin 30° = \cos 20° + \sqrt{3}\ \sin 20°.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$(\cos 20° + \sqrt{3}\ \sin 20°) \sin x = \sin 20° \cos x + \cos 20° \sin x,$$

eller $\sqrt{3}\ \tan x = 1$. Detta ger $x = 30° + k180°$.
Svar: Vinkeln $\angle BMN = 30°$.