Lösning till problemet januari 2002

Antag att $a \geq 1$ är ett heltal och att $x \geq 1$ är en heltalslösning till ekvationen $ax^2 + x = 2002$. Då gäller $2002 = ax^2 + x \geq x^2 + x$. Av $45^2 + 45 = 2070 > 2002$ och $44^2 + 44 = 1980 < 2002$ och det faktum att funktionen $x^2 + x$ är växande för $x \geq 1$ följer att $1 \leq x \leq 44$.
Faktoriseringen $x(ax + 1) = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ visar också att x måste vara av formen $x = 2^\alpha 7^\beta 11^\gamma 13^\delta$ där α, β, γ och $\delta \in \{0, 1\}$.
Antag nu att $\delta = 1$ dvs. $13|x$. Då gäller

$$x = 2002 - ax^2 = 11 \cdot 13^2 + 143 - ax^2 = 143 + k \cdot 13^2$$

dvs. $x \geq 143$ vilket strider mot $x \leq 44$. Analogt leder antagandet att $11|x$ till

$$x = 2002 - ax^2 = 16 \cdot 11^2 + 66 - ax^2 = 66 + k \cdot 11^2$$

dvs. $x \geq 66$. Om $7|x$ får man

$$x = 2002 - ax^2 = 40 \cdot 7^2 + 42 - ax^2 = 42 + k \cdot 11^2.$$

dvs. x skulle kunna vara lika med 42. Men 42 innehåller faktorn 3, i strid mot faktoriserigen av x.
Alltså är β, γ och δ alla 0 och $x = 1$ eller $x = 2$.
$x = 1$ ger, $a = 2001$, ekvationen $2001x^2 + x = 2002$ och rötterna 1 och $-\dfrac{2002}{2001}$.

$x = 2$ ger, $a = 500$, ekvationen $500x^2 + x = 2002$ och rötterna 2 och $-\dfrac{1001}{500}$.

Svar: $a = 2001$ eller $a = 500$