Lösning till problemet juli 2002

Om $x = u + v$, så är $x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvx$. För

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{980}{27}} + 6} \text{ och } v = -\sqrt[3]{\sqrt{\frac{980}{27}} - 6}$$

ger detta $u^3 + v^3 = 12$ och $3uv = -\sqrt[3]{980 - 36 \cdot 27} = -2$ och $x^3 = 12 - 2x$. Faktorisering av tredjegradspolynomet

$$x^3 + 2x - 12 = (x-2)(x^2 + 2x + 6) = (x-2)\left((x+1)^2 + 5\right)$$

visar att den enda reella roten till ekvationen $x^3 = 12 - 2x$ är $x = 2$. Alltså är $u + v$, som är reellt, lika med 2.

Alternativt kan man försöka sig på att skriva $\sqrt{\frac{980}{27}} + 6 = \frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + 6$ som en tredjepotens av $a\sqrt{\frac{5}{3}} + b$ där a och b är rationella.

Nu är, om a och b är rationella,

$$\left(a\sqrt{\frac{5}{3}} \pm b\right)^3 = \left(\frac{5}{3}a^3 + 3ab^2\right)\sqrt{\frac{5}{3}} \pm (5a^2b + b^3) = \frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} \pm 6$$

om och endast om

$$\begin{cases} 5a^3 + 9ab^2 &= 14 \\ 5a^2b + b^3 &= 6 \end{cases}.$$

En rationell lösning är $a = b = 1$. I själva verket är det den enda rationella lösningen, något man kan visa genom att lösa den homogena ekvationen $35a^2b + 7b^3 = 15a^3 + 27ab^2$ som har lösningarna $\frac{b}{a} = 1$, $\frac{b}{a} = \frac{10 \pm \sqrt{5}}{7}$.

Alltså är

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{980}{27}} + 6} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{980}{27}} - 6} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{\frac{5}{3}} + 1\right)^3} - \sqrt[3]{\left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1\right)^3} = 2.$$

Svar: Talet är lika med 2