

Lösning till problemet maj 2002

Låt f vara en funktion i klassen \mathcal{F}_{ab} . Då gäller $f(x+1) - f(x) = f(1) + af(2)$. Insättning av $x = 1$ i denna relation ger $f(1) = \left(\frac{1-a}{2}\right) f(2)$ varav $f(x) = \left(\frac{1+a}{2}\right) f(2)x + f(3) + bf(4)$. Insättning av $x = 3$ ger $\left(\frac{1+a}{2}\right) f(2) \cdot 3 + bf(4) = 0$ och

$$f(x) = \left(\frac{1+a}{2}\right) f(2)(x-3) + f(3)$$

Slutligen ger $x = 2$ att $\left(\frac{1+a}{2}\right) f(2) + f(2) = f(3)$ dvs.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) \left(\left(\frac{1+a}{2}\right) (x-2) + 1 \right) \\ \text{med } f(1) &= \left(\frac{1-a}{2}\right) f(2), \quad f(3) = \left(\frac{3+a}{2}\right) f(2) \\ \text{och } f(4) &= -3b \left(\frac{1+a}{2}\right) f(2). \end{aligned}$$

Valen $a = -1$, $b = \pm 1$ ger att f är konstant och $f(4) = 0$, dvs. klasserna $\mathcal{F}_{-1\pm 1}$ innehåller endast nollfunktionen.

För $f \in \mathcal{F}_{1b}$ gäller

$$f(x) = f(2)(x-1), \quad f(1) = 0, \quad f(3) = 2f(2) \quad \text{och} \quad f(4) = -3bf(2).$$

Nu ger insättning av $x = 4$ i funktionsuttrycket att $f(4) = 3f(2)$ som tillsammans med det sista villkoret ger $f(2) = -bf(2)$, dvs. $b = -1$ eller $f(2) = 0$. Alltså är även klassen \mathcal{F}_{11} en singletonmängd.

Däremot gäller för funktioner av typen $f(x) = k(x-1)$ att $f(1) = 0$, $f(2) = k$, $f(3) = 2k$, $f(4) = 3k$ och $f(x) = (0+k)x + 2k - 3k = (f(1) + f(2))x + f(3) - f(4)$.

Svar: Klasserna \mathcal{F}_{11} , \mathcal{F}_{-11} och \mathcal{F}_{-1-1} innehåller endast nollfunktionen. Klassen \mathcal{F}_{1-1} består av alla linjära funktioner av typ $f(x) = k(x-1)$, där k är en godtycklig konstant