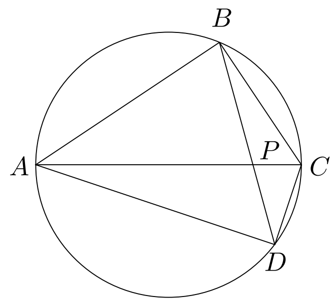
Lösning till problemet mars 2002

Sätt $\angle ACD = 2\alpha$. Periferivinkeln på en diameter är rät. Alltså är vinkeln $\angle ADC = 90°$. Detta ger $\angle CAD = 90° - 2\alpha$. Periferivinkelsatsen ger också att $\angle ABD = \angle ACD = 2\alpha$ och då triangeln $\triangle ABD$ är likbent, ger detta att $\angle ADB = 90° - \alpha$ och därmed $\angle BDC = \alpha$.



Sinussatsen tillämpad på trianglarna $\triangle DCP$ och $\triangle DAP$ ger

$$\frac{|DP|}{\sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin \alpha} \qquad \text{respektive} \qquad \frac{|DP|}{\sin(90° - 2\alpha)} = \frac{8}{\sin(90° - \alpha)}.$$

Elimination av $|DP|$ ger

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{4\sin(90° - 2\alpha)}{\sin(90° - \alpha)},$$

eller

$$2\sin\alpha\cos^2\alpha = 4\cos 2\alpha \sin\alpha$$

dvs

$$\cos 2\alpha + 1 = 4\cos 2\alpha$$

varav $\cos 2\alpha = 1/3$ och $|CD| = 10\cos 2\alpha = 10/3$.
Svar: $|CD| = 10/3$.