Lösning till problemet oktober 2002

Antag först att $n > 2$ är jämnt. Om då $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 1$ och $a_n = 0$ så är

$$P_i = \prod_{k \neq i} (a_i - a_k) = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq n-1 \\ (-1)^{n-1}, & i = n \end{cases}$$

och $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i = P_n = (-1)^{n-1} < 0$.

Om $n > 5$ är udda sätt $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = a_5 = \cdots = a_{n-1} = -1$ och $a_n = 0$. För alla $i < n$ finns då $k \neq n$ sådant att $a_k = a_i$ och

$$P_i = \prod_{k \neq i} (a_i - a_k) = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq n-1 \\ (-1)^3 \cdot 1^{n-4}, & i = n \end{cases}$$

varav $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i = P_n = -1 < 0$.

Antag nu att $n = 5$. Eftersom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i$ är invariant under alla permutationer av $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kan vi anta att $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_5$. Av $(a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3) \geq (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)$ följer att

$$P_5 + P_4 = (a_5 - a_4)\left((a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3) - (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)\right) \geq 0.$$

Anlogt gller

$$P_1 + P_2 = (a_2 - a_1)\left((a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_5 - a_1) - (a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_5 - a_2)\right) \geq 0.$$

Dessutom r $P_3 = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_3)(a_5 - a_3) \geq 0$.

Allts r $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} P_i \geq 0$ och $\mathcal{P}_5$ r sann.

Fallet $n = 3$ kan behandlas analogt eller alternativt med kvadratkomplettering.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} P_i &= (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \\ &= (a_1 - a_2)(a_1 - a_3 - a_2 + a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \\ &= (a_1 - a_2)^2 + (a_3 - a_1)(a_3 - a_1 + a_1 - a_2) \\ &= (a_1 - a_2)^2 + (a_3 - a_1)^2 + (a_3 - a_1)(a_1 - a_2) \\ &= \left((a_1 - a_2) + \frac{1}{2}(a_3 - a_1)\right)^2 + \frac{3}{4}(a_3 - a_1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Likhet intrffar om och endast om $a_1 = a_2 = a_3$.