# Lösning till problemet april 2003

Olikheten är ekvivalent med

$$\frac{(x+a)(a+1)+(2x+4)(2x+1)-3(2x+1)(a+1)}{(2x+1)(a+1)} \geq 0$$

eller förenklat

$$\frac{4x^2-5x(a-1)+(a-1)^2}{(2x+1)(a+1)} \geq 0.$$

För $x = 0$ övergår olikheten i $(a-1)^2/(a+1) \geq 0$, som visar att $a$ måste vara $> -1$ i båda fallen. För $x > -\dfrac{1}{2}$ och $a+1 > 0$ är nämnaren i bråket

$$\frac{4x^2-5x(a-1)+(a-1)^2}{(2x+1)(a+1)}$$

positiv och det räcker att bestämma de värden på $a > -1$ för vilket $4x^2-5x(a-1)+(a-1)^2 \geq 0$. Om $a = 1$ är denna olikhet uppfylld för alla $x$. Kvadratkomplettering och faktorisering ger

$$\begin{aligned}
4x^2-5x(a-1)+(a-1)^2 &= \left(2x-\frac{5(a-1)}{4}\right)^2-\frac{9(a-1)^2}{16} \\
&= (2x-2(a-1))\left(2x-\frac{a-1}{2}\right) \\
&= 4(x-(a-1))\left(x-\frac{a-1}{4}\right).
\end{aligned}$$

*i*) $x \geq 0$: Denna faktorisering visar att om $a > 1$ så är $4x^2-5x(a-1)+(a-1)^2 < 0$ för $0 < (a-1)/4 < x < a-1$ och olikheten är ej giltig för alla $x \geq 0$. Om däremot $x \geq 0$ och $-1 < a < 1$ är samtliga faktorerna positiva.

*ii*) $x > -\dfrac{1}{2}$: Om $-1 < a < 1$ är $x_0 = \max\left\{-\dfrac{1}{2}, a-1\right\} < \dfrac{a-1}{4}$. För $x_0 < x < \dfrac{a-1}{4}$ är $x-(a-1) \geq x-x_0 > 0$ och $x-\dfrac{a-1}{4} < 0$. För $-1 < a < 1$ finns alltså $x > -\dfrac{1}{2}$ sådant att olikheten inte är uppfylld.

**Svar**: *i*) $-1 < a \leq 1$, *ii*) $a = 1$