Lösning till problemet januari 2003

Av relationen $2003^n - 3^n = 2000 \sum_{k=0}^{n-1} 2003^k \cdot 3^{n-1-k}$, för $n \geq 1$, följer att entals- tiotals- och hundratalssiffran i potensen 2003^n överensstämmer med motsvarande siffra i potensen 3^n.
Låt $R(n,k)$ beteckna principala resten av heltalet n vid division med heltalet k. Sätt $c_n = 10a_n + b_n$, $n \geq 1$ Då är $c_n = R(3c_{n-1}, 10)$, för $n \geq 2$, och $c_1 = 03$. Rekursionsformel ger

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
c_n	03	09	27	81	43	29	87	61	83	49	47	41	23	69	07	21	63	89	67	01	03

Tabellen indikerar att följden $\{b_n\}_1^\infty$ har perioden 4, vilket också följer av relationen $3^{n+4} - 3^n = 3^n(3^4 - 1) = 8 \cdot 3^n \cdot 10$, $n \geq 1$. De fyra möjliga slutsiffrorna i potenserna 3^n är alltså $3, 9, 7, 1$ som alla är udda.
Av tabellen framgår också att de två slutsiffrorna i $3^{10} + 1$ är 5 och 0 och alltså är $3^{10} + 1$ delbart med 50. Eftersom $3^{10} - 1$ är ett jämnt tal är då $3^{20} - 1 = (3^{10} - 1)(3^{10} + 1)$ delbart med 100, varav följer att $3^{n+20} - 3^n = 3^n(3^{20} - 1)$ är delbart med 100, dvs. $c_{n+20} = c_n$ och följden $\{c_n\}_1^\infty$ har perioden 20. Därmed är 20 också en period i följden $\{a_n\}_1^\infty$, vars minsta period därmed måste vara en delare i 20. Men avståndet mellan två konsekutiva nollor i följden är > 10 och därför är minsta perioden för följden $\{a_n\}_1^\infty$ precis 20.
Av tabellen framgår att alla a_n med $1 \leq n \leq 20$ är jämna och därmed är alla a_n, $n \geq 1$ jämna.
Av $1 \leq c_n \leq 89$ följer $1 \leq [\sqrt{c_n}] \leq [\sqrt{89}] = 9$ och därför måste varje sammansatt tal i följden $\{c_n\}_1^\infty$ av udda tal innehålla $3, 5$ eller 7 som äkta primfaktor. Detta ger

$$\{c_n | c_n \text{ primtal }\} = \{3, 43, 29, 61, 83, 47, 41, 23, 7, 89, 67\},$$

som innehåller 11 element.
Svar: i) $\{a_n | n \geq 1\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $\{b_n | n \geq 1\} = \{1, 3, 7, 9\}$

ii) $\{a_n\}_1^\infty$ har period 20 och $\{b_n\}_1^\infty$ perioden 4

iii) $\{10a_n + b_n | n \geq 1\}$ innehåller 11 primtal och 8 sammansatta tal