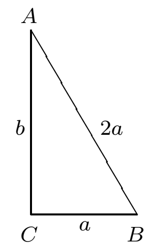
Lösning till problemet juli 2003

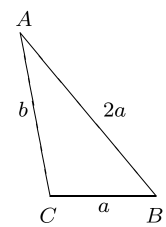
Låt i triangeln ABC, sidorna stående mot hörnen A, B och C vara a, b och $c = 2a$. Enligt triangelolikheten är då $a + b > 2a$, varav $b > a$. Vinkeln $\angle A$ är alltså den minsta i triangeln och därför spetsig. För vinklarna inträffar därför fyra fall:

- Vinkeln vid C är dubbelt så stor som vinkeln vid A.
  Sinusteoremet ger då
  $$\frac{\sin 2A}{2a} = \frac{\sin A}{a}, \qquad 0^\circ < A < 90^\circ,$$
  eller, enligt formeln för dubbla vinkeln, $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$,
  $$\sin A \cos A = \sin A, \qquad 0^\circ < A < 90^\circ,$$
  som saknar lösning.

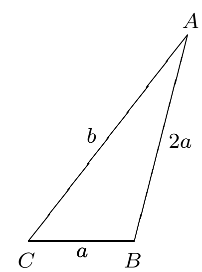
- Vinkeln vid B är dubbelt så stor som vinkeln vid A. Sinussatsen ger nu
  $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 2A}{b} = \frac{\sin(180 - 3A)}{c} = \frac{\sin 3A}{2a}, \qquad 0^\circ < A < 90^\circ,$$
  eller, med formeln för tredubbla vinkeln, $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$,
  $$3 \sin A - 4 \sin^3 A = 2 \sin A, \qquad 0^\circ < A < 90^\circ,$$
  som efter division med $\sin A$ ger $4 \sin^2 A = 1$, $0^\circ < A < 90^\circ$, dvs $\sin A = 1/2$. Detta ger den halva liksidiga triangeln.



- Vinkeln vid C är dubbelt så stor som vinkeln vid B. Här ger sinussatsen
  $$\frac{\sin 2B}{2a} = \frac{\sin C}{2a} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 3B}{a}, \qquad 0^\circ < B < 90^\circ.$$
  Övergång till enkla vinkeln och division med $\sin B$, ger ekvationen
  $$3 - 4 \sin^2 B = \cos B, \text{ eller } \cos^2 B - \frac{1}{4} \cos B - \frac{1}{4} = 0, , \qquad 0^\circ < B < 90^\circ.$$
  Den enda positiva roten till denna ekvation är $\cos B = (\sqrt{17} + 1)/8$, som ger $\cos C = \cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = (\sqrt{17} - 7)/16 < 0$. Den största vinkeln är i detta fall trubbig.



- Vinkeln vid B är dubbelt så stor som vinkeln vid C. Nu ger sinussatsen
  $$\frac{\sin 3C}{a} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{2a}, \qquad 0^\circ < C < 90^\circ.$$
  Övergång till enkla vinkeln och division med $\sin C$, ger ekvationen
  $$2(3 - 4 \sin^2 C) = 1, \qquad 0^\circ < C < 90^\circ,$$
  som ger $\sin^2 C = 5/8$ och $\cos B = \cos 2C = 1 - 2 \sin^2 C = -1/4$. Åter är den största vinkeln trubbig och, eftersom $-1/4 < (\sqrt{17} - 7)/16$ är ekvivalent med $3 < \sqrt{17}$, ger detta fall den största möjliga vinkeln.



Svar: Cosinus för den största tänkbara vinkeln ($\approx 104^\circ.48$) är $= -1/4$. Vinkelbenen är de två sidorna i triangeln, som har förhållandet $1 : 2$