Lösning till problemet november 2003

Beviset kan göras exempelvis med induktion.
Den givna rekursionsformeln ger

$$a_3 = 2^2 - a_2 - a_1 = 4 - 1 - 1 = 2 = a_3 + a_2$$

Formeln $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ gäller alltså för $n = 3$.
Antag nu att denna formel gäller för $n - 1 \geq 3$, dvs $a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3}$. Då är

$$\begin{aligned}
a_n &= 2^{n-1} - a_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} 2^{n-2-k} a_k \\
&= 2^{n-1} - a_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-4} 2^{n-2-k} a_k - a_{n-2} - 2a_{n-3} \\
&= 2^{n-1} - a_{n-1} - 4\sum_{k=2}^{n-4} 2^{n-4-k} a_k - a_{n-2} - 2a_{n-3} \\
&= 2^{n-1} - a_{n-1} + 4(a_{n-3} - 2^{n-3} + a_{n-2}) - a_{n-2} - 2a_{n-3} \\
&= -a_{n-1} + 2a_{n-3} + 3a_{n-2} \\
&= -a_{n-1} + 2(a_{n-1} - a_{n-2}) + 3a_{n-2} \\
&= a_{n-1} + a_{n-2}
\end{aligned}$$

som visar att även $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ är sann. Därmed är induktionssteget visat och av induktionsprincipen följer att formeln $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ är giltig för alla $n \geq 4$.