Lösning till problemet oktober 2003

Talen i följden kan skrivas på formen $9m-1$, med $m \geq 1$.

a) Alla tal $(9j+2)^3$, med $j \geq 0$, är av denna form, ty enligt binomialteoremet är

$$(9j+2)^3 = (9j)^3 + 3(9j)^2 2 + 3(9j)2^2 + 2^3 = 9(81j^3 + 54j^2 + 12j + 1) - 1.$$

b) Av framställningen

$$\begin{array}{lll} 2^3 = 8 = 9\cdot 1 - 1 & 3^3 = 27 = 9\cdot 3 + 0 & 4^3 = 64 = 9\cdot 7 + 1 \\ 5^3 = 125 = 9\cdot 14 - 1 & 6^3 = 216 = 9\cdot 24 + 0 & 7^3 = 343 = 9\cdot 38 + 1 \\ 8^3 = 512 = 9\cdot 57 - 1 & 9^3 = 729 = 9\cdot 81 + 0 & 10^3 = 1000 = 9\cdot 111 + 1 \end{array}$$

framgår att de tre jämna trepotenserna, mellan 1 och 1000, som ingår i talföljden är $2^3 = 8$, $5^3 = 125$ och $8^3 = 512$.

c) Med binomialteoremet visar man att

$$\begin{array}{lll} (9j)^3, (9j+3)^3, (9j+6)^3 & \text{har formen} & 9m+0 \\ (9j+2)^3, (9j+5)^3, (9j+8)^3 & \text{har formen} & 9m-1 \\ (9j+1)^3, (9j+4)^3, (9j+7)^3 & \text{har formen} & 9m+1 \end{array}$$

Nu ligger $(9j+r)^3$, $r = 2, 5, 8$, mellan 10^{3k} och $10^{3(k+1)}$ om och endast om $10^k < 9j + r < 10^{k+1}$, dvs.

$$\frac{10^k - 1}{9} - \frac{r-1}{9} < j < \frac{10^{k+1} - 1}{9} - \frac{r-1}{9},$$

eller d j r ett heltal

$$\frac{10^k - 1}{9} \leq j \leq \frac{10^{k+1} - 1}{9} - 1.$$

Antalet heltal i detta slutna intervall r

$$\frac{10^{k+1} - 1}{9} - 1 - \frac{10^k - 1}{9} + 1 = \frac{10^{k+1} - 10^k}{9} = 10^k.$$

Antalet jmna trepotenser blir d $3 \cdot 10^k$.