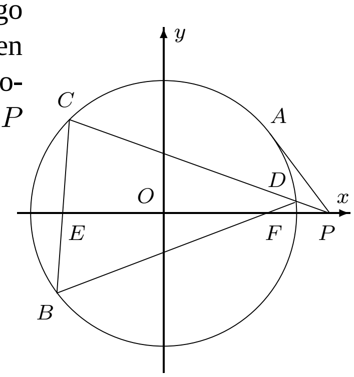
Lösning till problemet september 2003

Inför ett rätvinkligt koordinatsystem med cirkelns medelpunkt O som origo med punkten P på positiva x-axeln. Antag att cirkelns radien är 1, punkten A har koordinaterna (a, b), punkten C koordinaterna (ξ, η), punkten E koordinaterna $(x, 0)$ och linjen PC lutningen k. Då får punkterna B och P koordinaterna $(-a, -b)$ respektive $(a^{-1}, 0)$ och



$$k = \frac{\eta}{\xi - a^{-1}} \quad \text{och} \quad \frac{\eta + b}{\xi + a} = \frac{x + a}{b}.$$

Dessa relationer ger

$$\xi = \frac{1}{a} \frac{(k - ab)x + ka}{kx + ka - b} \quad \text{och} \quad \eta = \frac{k}{a} \frac{b - abx}{kx + ka - b}.$$

Insatt i likheten $\xi^2 + \eta^2 - 1 = 0$ ger detta, efter multiplikation med $a^2(kx + ka - b)^2$

$$((k - ab)x + ka)^2 + k^2(b - abx)^2 - a^2(kx + ka - b)^2 = 0.$$

Analoga räkningar med punkterna D och F ger samma andragradsekvation. Rötterna till ekvationen ovan ger alltså x-koordinaterna för punkterna E och F. I denna ekvation är koefficienten framför x lika med

$$2ka(k - ab) - 2k^2ab^2 - 2a^2k(ka - b) = 2ak^2(1 - a^2 - b^2) = 0$$

oberoende av (a, b) och k (eftersom $a^2 + b^2 = 1$ för alla punkter på cirkeln). Alltså är E och F motsatta punkter på x-axeln och $|OE| = |OF|$.