Lösning till problemet april 2004

Sätt $p(m) = f(m,0)$, $m = 0,1,\dots$.
För $m \geq 1$ gäller $\prod_{k=m+2}^{2m+2} k = 2(2m+1) \prod_{k=m+1}^{2m} k$ dvs. $p(m+1) = (4m+2)p(m)$, en relation som gäller även då $m = 0$.
Av den givna rekursionsformeln följer, med $n = 1$ och med godtyckligt $m \geq 0$, att

$$f(m,1) = 4(m+1)f(m,0) - f(m+1,0) = (4m+4)p(m) - p(m+1) = 2p(m).$$

Valet $n = 2$, $m \geq 0$ godtycklig ger nu

$$f(m,2) = 4(m+2)f(m,1) - f(m+1,1) = (4m+8)2p(m) - 2p(m+1) = 12p(m).$$

Det ligger nära till hands förmoda att funtionen f kan separeras, dvs. skrivas som en produkt av två funktioner p och q, där p endast beror av m och q endast av n. Den förmodan är korrekt för alla m då $n = 0,1,2$ med $q(0) = 1$, $q(1) = 2$ och $q(3) = 12$.
Antag nu att, för fixt $k \geq 0$, $f(m,k) = p(m)q(k)$ för alla $m \geq 0$. Rekursionsformeln ger med valet $n = k+1$ och godtyckligt $m \geq 0$

$$\begin{aligned} f(m,k+1) &= 4(m+k+1)f(m,k) - f(m+1,k) \\ &= \left((4m+4k+4)p(m) - p(m+1)\right)q(k) \\ &= (4k+2)p(m)q(k). \end{aligned}$$

Alltså gäller även $f(m,k+1) = p(m)q(k+1)$ för alla $m \geq 0$ om man väljer $q(k+1) = (4k+2)q(k)$. Av induktionsprincipen följer då att $f(m,k) = p(m)q(k)$, där funktionen q bestäms av begynnelsedata $q(0) = 1$ och rekursionsformel $q(k+1) = (4k+2)q(k)$.
Då $p(0) = q(0)$ och både p och q satisfierar rekursionsformel $q(k+1) = (4k+2)q(k)$ är $q = p$ och $f(m,n) = p(m)p(n)$. Härav följer omedelbart symmetrin $f(m,n) = f(n,m)$.

Anmärkning

Så snart man börjat misstänka att f kan separeras finns det många sätt att lista sig till de två faktorerna. Om man ansätter $f(m,n) = P(m)Q(n)$ kan den givna rekursionsformeln, efter division med $P(m)Q(n-1)$, skrivas

$$\frac{P(m+1)}{P(m)} - 4m = 4n - \frac{Q(n)}{Q(n-1)} = C,$$

där C är en konstant, eller

$$P(m+1) = (4m+C)P(m) \quad \text{och} \quad Q(n+1) = (4n+4-C)Q(n).$$

Om man utgår från symmetrin $P(m)Q(n) = f(m,n) = f(n,m) = P(n)Q(m)$, eller $P(m)/Q(m) = P(n)/Q(n) =$ konst., får man $(4m+C)/(4m+4-C) = 1$, dvs. $C = 2$. Eventuella separerande heltalfunktioner måste alltså båda satisfiera rekursionsformeln $P(k+1) = (4k+2)P(k)$. Av $1 = f(0,0) = P(0)Q(0)$ följer, om P och Q antar positiva heltal, $P(0) = Q(0) = 1$ och alltså är $P = Q = p$. Återsår nu att, exempelvis induktivt, ***visa*** den framtagna hypotesen ”$f(m,n) = p(m)p(n)$”.