Lösning till problemet augusti 2004

Om $f(x,y) = xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ visar identiteterna

$$\begin{aligned}
f(x,y) - f(-x,-y) &= 2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{1-x^2}, \\
f(x,y) - f(-x,y) &= 2xy + 2x\sqrt{1-y^2} \\
f(x,y) - f(x,-y) &= 2xy + 2y\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

att ett eventuellt största värde antas i kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. I fortsättningen betraktas bara x och y i intervallet $[0,1]$.
Av Lagranges identitet $(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ följer Cauchy-Schwarz olikhet $|ac+bd| \le \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ med likhet då och endast då $ad = bc$.

Detta ger med $a = x$, $b = \sqrt{1-x^2}$, $c = y + \sqrt{1-y^2}$ och $d = y - \sqrt{1-y^2}$

$$\begin{aligned}
f(x,y) &\le \left| x\left(y+\sqrt{1-y^2}\right) + \sqrt{1-x^2}\left(y-\sqrt{1-y^2}\right)\right| \\
&\le \sqrt{x^2+1-x^2}\sqrt{\left(y+\sqrt{1-y^2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{1-y^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{2},
\end{aligned}$$

med likhet i den senare olikheten om och endast om $x\left(y-\sqrt{1-y^2}\right) = \sqrt{1-x^2}\left(y+\sqrt{1-y^2}\right)$.
För $x, y \in [0,1]$ gäller likhet i olikheten

$$x\left(y+\sqrt{1-y^2}\right) + \sqrt{1-x^2}\left(y-\sqrt{1-y^2}\right) \le \left|x\left(y+\sqrt{1-y^2}\right) + \sqrt{1-x^2}\left(y-\sqrt{1-y^2}\right)\right|$$

om och endast om $y - \sqrt{1-y^2} \ge 0$. Alltså är $f(x,y) = \sqrt{2}$ om och endast om $x\left(y-\sqrt{1-y^2}\right) = \sqrt{1-x^2}\left(y+\sqrt{1-y^2}\right)$, $x \ge 0$, $y \ge \sqrt{1-y^2} \ge 0$. Ansatsen $y - \sqrt{1-y^2} = t\left(y+\sqrt{1-y^2}\right)$, med $0 \le t \le 1$ ger då $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ och $y = \dfrac{1+t}{\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}}$.
Alternativt kan man välja vinklar α och β i första kvadraten med $x = \cos\alpha$ och $y = \cos\beta$ som ger

$$\begin{aligned}
f(\cos\alpha, \cos\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
&= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\
&= \cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta) \\
&= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos(\alpha+\beta) + \cos\frac{\pi}{4}\sin(\alpha+\beta)\right) \\
&= \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}
\end{aligned}$$

med likhet då och endast då $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$.

Svar: Största värdet är $\sqrt{2}$ och antas då och endast då $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \dfrac{1+t}{\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}}$, $0 \le t \le 1$