Lösning till problemet januari 2004

Betrakta alla positiva heltal med $2n$ siffror hämtade ur mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ och där differensen mellan två på varandra följande siffror har absoluta beloppet 1. Låt antalet sådana tal som börjar med siffran $1, 2, 3, 4$ och 5 vara a_n, b_n, c_n, d_n respektive e_n. För $n = 1$ finns talen

12	$21,\ 23$	$32,\ 34$	$43,\ 45$	54
$a_1 = 1$	$b_1 = 2$	$c_1 = 2$	$d_1 = 2$	$e_1 = 1$

Observera att $c_1 = a_1 + e_1$.
Antag nu att $n > 1$, dvs att talet har minst 4 siffror. Om talet börjar med siffran 1 är andra siffran 2 medan tredje kan vara 1 eller 3. Härav följer

$$a_n = a_{n-1} + c_{n-1} \tag{1}$$

Analogt om om första siffran är 5, måste andra siffran vara 4, medan tredje siffran kan vara 3 eller 5. Alltså gäller

$$e_n = c_{n-1} + e_{n-1} \tag{2}$$

Om de två första siffrorna är 2 och 3 är nästa siffra 2 eller 4, om de två första siffrorna är 2 och 1 är nästa siffra 2. Detta ger

$$b_n = 2b_{n-1} + d_{n-1} \tag{3}$$

Analogt visar man att

$$d_n = b_{n-1} + 2d_{n-1} \tag{4}$$

Om de två första siffrorna är 3 och 2 är nästa siffra 1 eller 3, om de två första siffrorna är 3 och 4 är nästa siffra 3 eller 5, varav

$$c_n = a_{n-1} + 2c_{n-1} + e_{n-1} \tag{5}$$

Av (1), (2) och (5) följer att $c_n = a_n + e_n$, som alltså gäller för alla $n = 1, 2, \ldots$. Addition av samtliga fem relationerna ger

$$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} + 4c_{n-1} + 3d_{n-1} + 2e_{n-1}$$

eller (då $c_{n-1} = a_{n-1} + e_{n-1}$)

$$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 3(a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1} + e_{n-1})$$

Antalet ökar alltså med en faktor 3 för varje utökning med två siffror. Eftersom antalet tal med två siffror är 8, och $2004 = 2 \cdot 1002$ är det sökta antalet $8 \cdot 3^{1001}$.

Svar: Antalet tal är $8 \cdot 3^{1001}$