

Lösning till problemet juli 2004

Om sidolängder, omkrets och area betecknas med a , b , c , $2p$ och T gäller sambanden

$$r = \frac{T}{p}, \quad R = \frac{abc}{4T} \quad \text{och} \quad T^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Detta ger med hjälp av cosinusteoremet:

$$\begin{aligned} \frac{R+r}{R} &= 1 + \frac{r}{R} = 1 + \frac{\frac{T}{p}}{\frac{abc}{4T}} \\ &= 1 + \frac{8T^2}{2pabc} = \frac{2abc + 8(p-a)(p-b)(p-c)}{2abc} \\ &= \frac{2abc + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2abc} \\ &= \frac{a(c^2 + b^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc} \\ &= \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \cos A + \cos B + \cos C \end{aligned}$$