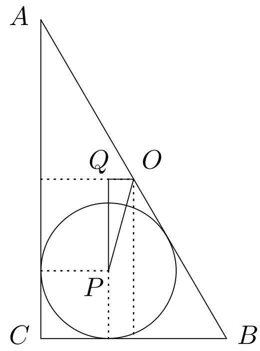
Lösning till problemet november 2004



Låt kateterna i triangeln ABC ha längderna a respektive b. Den omskrivna cirkeln medelpunkt O är mittpunkt på hypotenusan, vars längd är $2R$. Tangentlängderna från triangelns hörn A, B och C till den inskrivna triangeln är $b-r$, $a-r$ respektive r. Hypotenusans längd är därför $a+b-2r=2R$. I den rätvinkliga triangeln OQP, där P är den inskrivna cirkelns medelpunkt och kateterna parallella med den givna triangelns kateter har hypotenusan längden d och kateterna längderna $a/2-r$ respektive $b/2-r$. Pythagoras sats ger då

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(\frac{a}{2}-r\right)^2+\left(\frac{b}{2}-r\right)^2 \\ &= \frac{a^2+b^2}{4}-(a+b)r+2r^2 \\ &= \frac{4R^2}{4}-2(R+r)r+2r^2 = R^2-2rR. \end{aligned}$$

Amn. Formeln gäller för alla trianglar. Uppgift nr 6 i den Internationella Matematkolympiaden 1962 behandlar fallet då triangeln är likbent.