Lösning till problemet september 2004

Summan av elementen i den ursprungliga mängden är $\frac{(1+3m)3m}{2}$. Varje delmängd måste då ha summan $\frac{(1+3m)3}{2} = 4m + 2 + \frac{m-1}{2}$. Denna summa måste vara ett heltal vilket medför att m måste vara udda. Omvänt om $m = 2n+1$ är udda välj först ut de $n+1$ olika delmängderna

$$U_k = \{2k+1, 3n+2-k, 6n+3-k\}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Summan av elementen i dessa mängder är $9n + 6 = \frac{(1+3m)3}{2}$. I den ursprungliga mängden har då alla tal mellan $5n+3$ och $6n+3$ utnyttjats som tredje element i delmängderna, alla tal mellan $2n+2$ och $3n+2$ som andra element samt de udda talen mellan 1 och $2n+1$ som första element. Elementen som återstår är de jämna talet $2, 4, \ldots, 2n$ och samtliga heltal mellan $3n+3$ och $5n+2$. Sätt nu

$$J_k = \{2k, 4n+3-k, 5n+3-k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Även i dessa mängder är summan av elementen $9n+6$. I mängderna utnyttjas, som första element, alla jämna tal mellan 2 och $2n$, som andra element alla tal mellan $3n+3$ och $4n+2$ och som tredje element alla tal mellan $4n+3$ och $5n+2$. Samtliga element i ursprungliga mängden är nu fördelade i $2n+1 = m$ delmängder om vardera tre element och med konstant summa av de ingående elementen, vilket visar att en partition är möjlig.

Svar: En partition är möjlig om och endast om $m \geq 2$ är ett udda tal