Lösning till problemet april 2005

Det gäller att bestämma möjliga heltalssummor $p = x + y + z$ av de icke-negativa heltalen x, y, z under förutsättning att $3x + 4y + 2z \geq 10$, $x + 6y + 8z \geq 40$ och $5x + 9y + 7z \leq 50$.

Antag att $p = x+y+z \leq 4$. Då är $y+z \leq 4$ och $x+6y+8z \leq x+y+z+7(y+z) \leq 4+7\cdot 4 = 32 < 40$, vilket strider mot andra radens villkor.

För $p = 5$ finns lösningen $x = 0$, $y = 0$ och $z = 5$.

För $p = 6$ finns lösningen $x = 0$, $y = 1$ och $z = 5$.

För $p = 7$ finns lösningen $x = 1$, $y = 1$ och $z = 5$.

För $p = 8$ finns lösningen $x = 3$, $y = 0$ och $z = 5$.

Antag att $x + y + z = p \geq 9$. Då är $5p \leq 5p + 4y + 2z \leq 5(x + y + z) + 4y + 2z = 5x + 9y + 7z \leq 50$ varav $0 \leq 4y + 2z \leq 5(10 - p)$ Alltså är $9 \leq p \leq 10$ och $4y + 2z \leq 5$. Detta ger $y \leq 1$ och $z \leq 2$. Men då är $x + 6y + 8z = p + 5y + 7z \leq 10 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 29 < 40$ vilket åter strider mot andra radens villkor.

Möjliga vinstpoäng är alltså $5, 6, 7$ eller 8.

Om utropet är a och b med $a > b$ så ger villkoren $3x+4y+2z \geq a$ och $x+6y+8z \geq b$ att $5x+9y+7z = \frac{3}{2}(3x+4y+2z) + \frac{1}{2}(x+6y+8z) \geq \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b = a+b+\frac{1}{2}(a-b) > a+b$. De tre radernas villkor är aldrig samtidigt uppfyllda och lösning saknas.

Svar: Möjliga poäng är 5, 6, 7 eller 8.