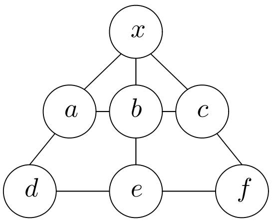
Lösning till problemet augusti 2005

Antag att det finns en efterfrågad utplacering av siffrorna i ringarna och låt den vara som i figuren.



Eftersom $1 + 2 + \cdots + 7 = 28$ är då

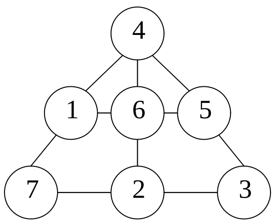
$$\begin{aligned} 28 - x &= (a+b+c) + (d+e+f) = 2(a+b+c) \\ &= (a+d) + (b+e) + (c+f) = 3(a+d) \end{aligned}$$

som visar att $28 - x$ måste vara delbart med $2 \cdot 3 = 6$. Det enda heltal x med $1 \leq x \leq 7$ för vilket detta gäller är $x = 4$. I den översta ringen måste alltid siffran 4 placeras.

För de återstående siffrorna gäller då

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} a & + & b & + & c & & & & & & & = & 12 \\ a & & & & & + & d & & & & & = & 8 \\ & & b & & & & & + & e & & & = & 8 \\ & & & & c & & & & & + & f & = & 8 \\ & & & & & & d & + & e & + & f & = & 12 \end{array} \right.$$

Systemet har lösningarna $a = e + f - 4$, $b = 8 - e$, $c = 8 - f$, $d = 12 - e - f$. Villkoret att de obekanta ska vara olika heltal mellan 1 och 7 skilda från 4 ger bl.a. $e \neq f$, $5 \leq e + f \leq 11$ ($1 \leq a \leq 7$) och $e + f \neq 8$ ($a \neq d$).
Valet $e = 2$, $f = 3$ ger $a = 1$, $b = 6$, $c = 5$, $d = 7$.



Systemets bivillkor ger precis 12 lösningar dvs. det finns 12 olika sätt att placera ut siffrorna. Att det finns minst 12 olika sätt (om det finns något) kan man också inse rent kombinatoriskt. De två horisontella raderna kan byta plats och de tre andra raderna kan godtyckligt permuteras. Detta ger $2 \cdot 6 = 12$ olika utplaceringar.

När man visat att den översta ringen måste innehålla talet 4 och att den gemensamma summan måste vara 12 kan man istället för att lösa ett underbestämt ekvationssystem resonera kombinatoriskt exempelvis så här: Eftersom $12 - 1 - 2 = 9 > 7$ kan inte talen 1 och 2 placeras i samma rad. Talet 1 kan placeras i vilken som helst av sex ringar. För varje val kan sedan talet 2 placeras i två av de återstående ringarna. Detta ger 12 möjligheter. Sedan är platserna för talen 7 respektive 6 välbestämda i de icke horisontella rader som innehåller 1 respektive 2. De återstående talen 3 och 5 får sedan entydigt bestämda platser.

Svar: Den översta ringen måste innehålla siffran 4. Det finns precis 12 olika utplaceringar