Lösning till problemet juli 2005

Sätt $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$ för $k = 1, 2, \ldots, 99$ och $\Delta a_{100} = a_{100} - a_1$. Eftersom $\sum_{k=1}^{100} \Delta a_k = 0$ och alla differenserna är $\neq 0$ förekommer ett antal teckenväxlingar i sviten $\{\Delta a_k\}_1^{100}$. Antag att differenserna byter tecken då index är $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ ($\Delta a_{k_i - 1}$ och Δa_{k_i} har olika tecken). Då gäller, med $k_0 = 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{100} |\Delta a_k| &= |a_1 - a_{k_1}| + |a_{k_1} - a_{k_2}| + \cdots + |a_{k_n} - a_1| \\
&= \varepsilon((a_{k_0} - a_{k_1}) - (a_{k_1} - a_{k_2}) + \cdots \pm (a_{k_n} - a_{k_0})) \\
&= \varepsilon(a_{k_0} - 2a_{k_1} + 2a_{k_2} - \cdots \pm 2a_{k_n} \mp a_{k_0})
\end{aligned}$$

där $\varepsilon = 1$ om $|a_1 - a_{k_0}| > 0$ och $= -1$ om $|a_1 - a_{k_0}| < 0$. Om nu n är jämnt har sista termen a_{k_0} i den sista parentesen minustecken och

$$\sum_{k=1}^{100} |\Delta a_k| = 2\varepsilon \Big((a_{k_2} + a_{k_4} + \cdots + a_{k_n}) - (a_{k_1} + a_{k_3} + \cdots + a_{k_{n-1}}) \Big)$$

och om n är udda så är

$$\sum_{k=1}^{100} |\Delta a_k| = 2\varepsilon \Big((a_{k_0} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_{n-1}}) - (a_{k_1} + a_{k_3} + \cdots + a_{k_n}) \Big)$$

som visar att summan kan skrivas som skillnaden mellan två summor med samma antal termer:

$$\sum_{k=1}^{100} |\Delta a_k| = 2 \sum_{j=1}^{m} b_j - 2 \sum_{j=1}^{m} c_j$$

där b_j och c_j är olika tal valda ur mängden $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Denna summa blir så stor som möjligt om $b_j = 101 - j$ och $c_j = j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Alltså är

$$\sum_{k=1}^{100} |\Delta a_k| = 2 \left(\frac{(100 + 101 - m)m}{2} - \frac{(1 + m)m}{2} \right) = 2m(100 - m) \leq 2 \cdot 50^2 = 5000.$$

Permutationen där $a_{2k+1} = 51 + k$ och $a_{2k+2} = 50 - k$, $k = 0, 1, \ldots, 49$ ger $\Delta a_k = k$ om k är udda, $\Delta a_k = -k$ om $k < 100$ är jämnt och $\Delta a_{100} = -50$ varav $\sum_{k=1}^{100} |\Delta a_k| = (1 + 2 + \cdots + 99) + 50 = 5000$.

Svar: Maximala värdet är 5000