Lösning till problemet november 2005

För 19 av de 25 aktuella primtalen kan man hitta heltal a, b, c sådana att primtalet är kvadratsumman av dessa tre heltal.

p	a	b	c	p	a	b	c	p	a	b	c	p	a	b	c
2	1	1	0	17	4	1	0	43	5	3	3	73	8	3	0
3	1	1	1	19	3	3	1	53	7	2	0	83	9	1	1
5	2	1	0	29	5	2	0	59	7	3	1	89	8	5	0
11	3	1	1	37	6	1	0	61	6	5	0	97	9	4	0
13	3	2	0	41	6	2	1	67	7	3	3				

För de återsående primtalen p $(7, 23, 31, 47, 71, 79)$ gäller att $p + 1$ är delbart med 8.
Vi ska utnyttja den egenskapen för att visa att ekvation $a^2 + b^2 + c^2 = p$, där p är ett positivt heltal och $8|(p + 1)$, saknar rationella lösningar.
Antag att det finns rationella tal a, b och c sådana att $a^2 + b^2 + c^2 = p$. Antag vidare att $a = \dfrac{x}{t}$, $b = \dfrac{y}{t}$ och $c = \dfrac{z}{t}$, där x, y, z och $t > 0$ är hela tal utan gemensam primtalsfaktor. Då gäller $x^2 + y^2 + z^2 = pt^2$ eller

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (p + 1)t^2.$$

Om $s = 8k$, $s = 8k \pm 1$, $s = 8k \pm 2$, $s = 8k \pm 3$ respektive $s = 8k + 4$, så blir principala resten vid division av s^2 med 8, lika med 0,1,4,1 respektive 0. Om summan $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (p + 1)t^2$ delas med 8 blir principala resten 0. Nu kan inte samtliga termer i vänsterleden vara jämna ty då har x, y, z och t den gemensamma faktorn 2. Alltså är alla termer udda eller precis två termer udda. Om alla termer är udda ger division av $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ med 8 principala resten 4 (och inte 0) om två är udda och två är jämna blir resten 2 eller 6 (och inte 0). I båda fallen får vi en motsägelse.

Svar: $\dfrac{19}{25} = 0,76$