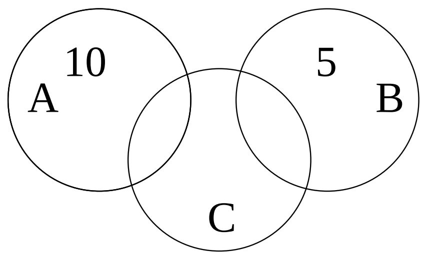
MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Lösningar till
Tentamen i Introduktionskursen för D 2003-08-30.

1. (a) Vi får successivt att $f(2) = f(1)^2 + 2f(0) = 1$, $f(3) = f(2)^2 + 2f(1) = 3$, $f(4) = f(3)^2 + 2f(2) = 11$ och $f(5) = f(4)^2 + 2f(3) = 127$.
   (b) Vi observerar att om $f(n-1)$ är udda så är också $f(n-1)^2$ udda, eftersom produkten av två udda tal blir udda. Efterson $2f(n-2)$ är jämnt blir därmed $f(n) = f(n-1)^2 + 2f(n-2)$ udda. Alltså om $f(n-1)$ är udda så är också $f(n)$ det och eftersom nu $f(1)$ är udda så kommer $f(n)$ (rekursivt) att vara det för alla $n \geq 1$. (Ett fullständigt bevis kräver så kallad induktion som ni kommer att lära er i början av matematik del A.)

2. Ett Venn-diagram över situationen ser ut så här:



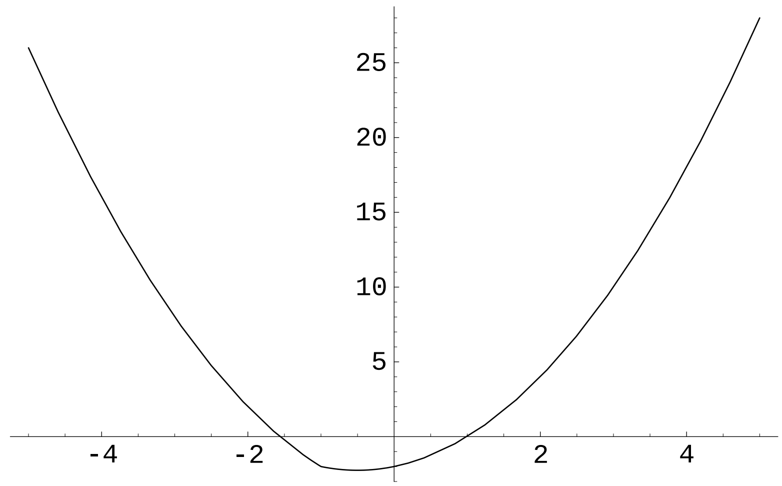
För att få ihop 30 element totalt så måste de tre okända fälten innehålla exakt 15 element och alla dessa ligger i C som därför måste innehålla exakt 15 element.

3. (a) $A \setminus B = \{1\}$.
   (b) $\mathcal{P}(\mathcal{U}) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \mathcal{U}\big\}$
   (c) $\emptyset = \overline{\mathcal{U}}$, $\{1\} = A \setminus B$, $\{2\} = A \cap B$, $\{3\} = \overline{A}$, $\{1,2\} = A$, $\{1,3\} = \overline{A \cap B}$ och $\{2,3\} = B$.

4. (a) Vi delar upp i två olika fall beroende på tecknet innanför absolutbeloppet:
   Fall 1: $x+1 > 0$, d v s $x > -1$. Då är $f(x) = x^2 - 3 + x + 1 = x^2 + x - 2$ vilket ger lösningarna
$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1 \text{ eller } -2.$$
   Av dessa är -2 ingen lösning eftersom vi antagit att $x > -1$.
   Fall 2: $x+1 \leq 0$, d v s $x \leq -1$. Då är $f(x) = x^2 - 3 - (x+1) = x^2 - x - 4$ vilket ger lösningarna
$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Av dessa är den med plustecken ingen lösning eftersom vi antagit att $x \le -1$.
Vi får alltså de två lösningarna $x = 1$ och $x = (1 - \sqrt{17})/2$.

(b) Grafen ser ut så här:



5. (a) Eftersom $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ så är $f(1) = 0$ om och endast om $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$ och därmed är de två mängderna lika.

   (b) Om man deriverar ett polynom av grad högst 3 så får man ett polynom av grad högst 2, vilket ju tillhör M.

   (c)
$$D(M) = \{f \in M : a_3 = 0\}.$$

6. Genom att byta summationsvariabel i den andra summan och observera att de två summorna är identiska förutom att den första har ett lägre startvärde så får vi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N+1} i(i-1) - \sum_{j=2}^{N} j(j+1) &= \big[j = k-1\big] = \sum_{i=1}^{N+1} i(i-1) - \sum_{k=3}^{N+1} (k-1)k \\ &= \sum_{i=1}^{2} i(i-1) = 0 + 2 = 2.\end{aligned}$$

7. (a) Att addition är associativ får vi anse vara känt. Talet 0 är en identitet, ty $a + 0 = 0 + a = a$ för alla heltal. Varje tal a har en invers med avseende på addition nämligen $-a$, ty $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Därmed uppfyller heltalen de tre villkoren för att vara en grupp med avseende på addition.

   (b) De naturliga talen är inte en grupp, ty alla tal (utom 0) saknar invers i $\mathbb{N}$.

   (c) Nej det är den inte, ty 0 saknar invers eftersom 1 är identitet och ekvationen $0 \cdot x = 1$ saknar lösning.