MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Introduktionskurs för D, IT och Data GU, 2004-08-28.

1.

$$\begin{aligned} A &= \{4,5,6,7,8,9\} \\ B &= \{0,1,7,8,9\} \\ A \cap B &= \{7,8,9\} \\ A \cup B &= \{0,1,4,5,6,7,8,9\} \\ A \setminus B &= \{4,5,6\} \end{aligned}$$

2. (a) Vi får att $g \circ f(x)$ är betyget som x får på tentan, eftersom $g \circ f(x) = g(f(x))$.

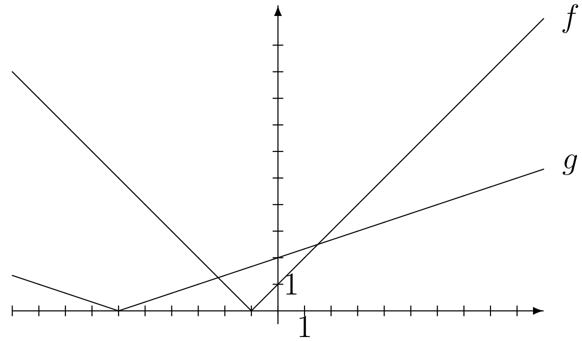
   (b) Funktionen g är inte injektiv, eftersom t ex $g(20) = g(50) =$'Godkänd'.

   (c) Ja, g är surjektiv, ty t ex $g(0) =$'Underkänd' och $g(50) =$'Godkänd' så $g(B) = C$.

   (d) Nej, f är inte injektiv, ty mer än 200 personer skriver tentan och det finns bara 51 möjliga resultat. Alltså måste minst två (i själva verket minst 4) få samma poäng.

3. (a) Vi delar in i tre olika fall beroende på tecknen av $x+1$ och $\frac{x}{3}+2$.
   I) $\mathbf{x} \geq -1$: I det här fallet är $f(x) = g(x)$ ekvivalent med $x+1 = \frac{x}{3}+2$ vilket har lösningen $x = \frac{3}{2}$.
   II) $-6 < x < -1$: I det här fallet är $f(x) = g(x)$ ekvivalent med $-(x+1) = \frac{x}{3}+2$ vilket har lösningen $x = -\frac{9}{4}$.
   III) $\mathbf{x} \leq -6$: I det här fallet är $f(x) = g(x)$ ekvivalent med $-(x+1) = -(\frac{x}{3}+2)$ vilket har lösningen $x = \frac{3}{2}$. Denna ligger inte i det aktuella intervallet och är därför en 'falsk' lösning. (Dock är det ju en lösning enligt I) ovan.)
   Svar: $x = \frac{3}{2}$ eller $x = -\frac{9}{4}$.

   (b)



4. Villkoren $x \star y = x * y = y * x$ är ekvivalenta med ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2 &= 2x + y \\ 2x + y &= 2y + x. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $y = x$ och sätter vi in det i den första så får vi $2x + 2 = 3x$ vilket har den enda lösningen $x = 2$.
Svar: $x = y = 2$.

5. (a) $M_U = \{(\emptyset, \emptyset)\}$.

   (b) $M_U = \{(\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{1\}),(\emptyset,\{2\}),(\emptyset,U),(\{1\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),$
   $(\{1\},U),(\{2\},U),(U,U)\}$.

   (c) Vi tittar på antalet par (d v s antalet element) i M_U med den andra mängden (B) fixerad. Om $B = \emptyset$ så finns det ett par. Om $|B| = 1$ så finns det 2 par och det finns 3 olika sådana B. Totalt har vi hittills alltså $1 + 3 \cdot 2$ par. Om $|B| = 2$ så finns det 4 par och det finns 3 olika sådana B. Dessa bidrar alltså med $3 \cdot 4$ par. Till slut finns det 8 par då $B = U$. (I alla dessa fallen handlar det helt enkelt om hur många delmängder som den fixerade mängden B har.)
   Summerar vi får vi svaret $1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 8 = 27$.

6. Genom att byta summationsvariabel ($j = i + 1$) i den andra summan och bryta ut -1 ur den första så observerar vi att de två summorna är identiska förutom att de har olika tecken och att den andra har ett lägre startvärde:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{1000}(1-2i)^3 + \sum_{i=0}^{999}(2i+1)^3 &= \sum_{i=2}^{1000} -(2i-1)^3 + \sum_{j=1}^{1000}(2j-1)^3 \\ &= -\sum_{i=2}^{1000}(2i-1)^3 + \sum_{j=1}^{1000}(2j-1)^3 = \sum_{j=1}^{1}(2j-1)^3 = 1. \end{aligned}$$

7. Vi definierar $f, g \in M$ genom

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(1) = 0, \\ f(x) = x, \text{ då } x > 1, \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} g(0) = 2, \\ g(1) = 0, \\ g(2) = 1, \\ g(x) = x, \text{ då } x > 2. \end{cases}$$

Vi får då att

$$\begin{aligned} f \star g(0) &= f(g(f^{-1}(g^{-1}(0)))) \\ &= f(g(f^{-1}(1))) = f(g(0)) = f(2) = 2 \end{aligned}$$

och att

$$\begin{aligned} g \star f(0) &= g(f(g^{-1}(f^{-1}(0)))) \\ &= g(f(g^{-1}(1))) = g(f(2)) = g(2) = 1. \end{aligned}$$

Alltså är $f \star g \neq g \star f$ och därmed är $\star$ inte kommutativ.