MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet
Kompletterande inlämningsuppgifter, Introduktionskursen för D/IT och Data GU, 2004.

OBS: Egenhändigt tillverkade lösningar ska lämnas in till examinatorn.
Senaste dag för inlämning är 26 november.
Man ska vara beredd att muntligt kunna förklara sina lösningar.

---

1. Vi definierar två reella funktioner $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom $f(x) = |x+1|$ och $g(x) = x^2 - 2$.
   (a) Beräkna $f \circ g$ och $g \circ f$.
   (b) Lös ekvationerna $f \circ g(x) = 1$ och $g \circ f(x) = -2$.

2. Låt A och B vara två mängder sådana att $|A| = 15$ och $|A \cap B| = 7$.
   (a) Vad är det minimala respektive maximala antalet element som B kan innehålla?
   (b) Om $|A \cup B| = 39$, vad är då $|B \setminus A|$?

   Motivera dina svar.

3. För varje (fixt) par av reella tal $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ definierar vi en binär operator $\star$ på de reella talen genom
$$x \star y = ax + by.$$
   (a) För vilka par $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ är $\star$ kommutativ?
   (b) För vilka par $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ är $\star$ associativ?

   Motivera dina svar.

4. En reell funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säges vara *växande* om $x < y$ medför att $f(x) \leq f(y)$ och den säges vara *strängt växande* om $x < y$ medför att $f(x) < f(y)$.
   (a) Ge exempel på $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är växande men ej strängt växande.
   (b) Antag att f är strängt växande. Motivera varför
$$\sum_{i=1}^{N} f(i) < \sum_{i=2}^{N+1} f(i)$$
   för alla positiva heltal N.

vänd

5. Låt M vara en mängd vilken som helst. Vi definierar en operator $\star$ på potensmängden $\mathcal{P}(M)$ av M genom

$$A \star B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(a) Är $\star$ kommutativ?

(b) Finns det någon identitet?

Alla svar måste motiveras!