

**Inledning till algebraisk geometri**  
Övningar och inlämningsuppgifter V 4

**Övningar**

- Beskriv kurvan  $C_1: 2x + y^2 = 1$  i de två andra standardkartor på  $\mathbb{P}^2$ ; homogenisera ekvationen först med koordinaten  $z$ .
  - Låt  $C_2$  vara definierad genom ekvationen  $y = x^3$  i den affina kartan  $z = 1$ . Hur ser  $C_2$  ut i närheten av den oändligt avlägsna linjen? Ger ekvationen och rita kurvan.
  - Hitta alla gemensamma punkter av  $C_1$  och  $C_2$ .
- Låt  $k = \mathbb{Z}_2$ . Hur många punkter har  $\mathbb{P}_k^2$ ? Hur många linjer går genom  $P = (1 : 0 : 0)$ ? Hur många punkter ligger på varje av dessa linjer? Rita alla punkter och linjer. Ledning: välj  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  och  $(0 : 0 : 1)$  som hörn i en triangel och  $(1 : 1 : 1)$  som inre punkt.
- Använd en lämplig parametrisering av  $C_1$  för att beräkna  $C_1 \cap C_2$ , där
  - $C_1: X = 0, C_2: YZ = X^2$ ,
  - $C_1: YZ = X^2, C_2: Z(X - Z) = 0$ ,
  - $C_1: X = 0, C_2: YZ^2 = X^3$ .
- Parametrisera cirkeln  $x^2 + y^2 = 5$  under användning av en variabel linje genom punkten (2.1) och hitta därmed alla rationella lösningar till  $x^2 + y^2 = 5$ .
- Reid 1.5
- Reid 1.6. Vad händer om  $k = \mathbb{Z}_3$ ?
- Reid 1.8

**Inlämningsuppgifter**, att lämnas in 2006-02-06.

- Låt  $C_1: y = x^2 + 1$  och  $C_2: y = 0$ . Vad är  $C_1 \cap C_2$  i  $\mathbb{R}^2$  respektive  $\mathbb{C}^2$ ? Ändras svaret om vi homogeniserar och uppfattar kurvorna i  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  resp  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ ?
  - Låt  $C_k$  vara cirkeln  $x^2 + y^2 = k^2$  i  $\mathbb{R}^2$ . Visa att  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ . Vad händer om vi ersätter  $\mathbb{R}^2$  med  $\mathbb{C}^2$ ? och med  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ ?
  - Två kägelsnitt har högst fyra skärningspunkter (med multiplicitet). Get ett exempel av två kägelsnitt i  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  som skär varandra bara i två punkter. Hitta de övriga skärningspunkter i  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  (detta är mer eller mindre lätt beroende på dina ekvationer). Varför vet du utan beräkning att dessa punkter har multiplicitet 1?
- Reid 1.9
- Reid 1.2