MATEMATIK V06
GU/CTH

Inledning till algebraisk geometri
Övningar och inlämningsuppgifter V 6

Övningar

1. Låt P_1, ..., P_6 vara 6 punkter på ett icke-degenererat kägelsnitt C. Ange en bas för $S_3(P_1, \dots, P_6)$.

2. **Dualitet**. Låt $V \equiv \mathbb{R}^3$ ha bas $\{e_0, e_1, e_2\}$ och låt $(X_0 : X_1 : X_2)$ vara korresponderande homogena koordinater på $\mathbb{P}(V) \equiv \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Låt $\{e_0^*, e_1^*, e_2^*\}$ vara den duala basen i dualrummet V^*, och $(U_0 : U_1 : U_2)$ korresponderande homogena koordinater i $\mathbb{P}(V^*) \equiv \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Låt $P = (a_0 : a_1 : a_2)$ vara en punkt i $\mathbb{P}(V)$. Beskriv knippen av alla linjer i $\mathbb{P}(V)$ genom P i koordinaterna $(U_0 : U_1 : U_2)$.

3. Låt $C \subset \mathbb{P}^2_R$ vara en icke-degenererat kägelsnitt med matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

I vektorform skrivs ekvationen som $X^tAX = 0$. Bestäm ekvationen för tangenten i en punkt $(p_0 : p_1 : p_2)$ på C. Visa att ekvationen för alla tangenter ges in linjekoordinater $(U_0 : U_1 : U_2)$ av

$$\det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & U_0 \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & U_1 \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & U_2 \\ U_0 & U_1 & U_2 & 0 \end{pmatrix} = 0 .$$

Visa att ekvationen ges i vektorform av $UA^{-1}U^t = 0$ (där U skrivs som radvektor).

Inlämningsuppgifter, att lämnas in 2006-02-13.

1. Låt C_1, $C_2 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ vara kubiska kurvor med homogena ekvationer

$$\begin{aligned} C_1&: \quad (X+Z)^3 + 3Y^3 = Z^3, \\ C_2&: \quad X^3 + X^2(Y+Z) + XZ^2 + Y^3 = 0. \end{aligned}$$

Beräkna C_1 och C_2's skärningspunkter och deras multipliciteter.

2. Låt $C \subset \mathbb{P}^2_R$ vara kurvan med den affina parametriseringen $(x, y) = (t^2, t^3 - t)$. Beräkna kurvans ekvation genom att eliminera t ur ekvationerna med resultanten.

3. Let $f(x, y)$ be the affine equation of a real or complex plane curve, and $P = (p, q)$ a point on it; suppose that $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$, so by the implicit function theorem $y = \varphi(x)$ in a neighbourhood of P. Prove that P is an inflexion point (in the sense that $\varphi''(p) = 0$) if and only if:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(Hint: differentiate $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ twice. Compute also the determinant) Use Euler's formula and $f(p, q) = 0$ to translate this condition into the condition on the vanishing of the Hessian of the associated homogeneous function $F(X, Y, Z)$.