MATEMATIK GU/CTH V06

Inledning till algebraisk geometri
Övningar och inlämningsuppgifter V 8

Övningar

1. Bestäm $I(V(I))$ för följande ideal i $\mathbb{R}[x,y]$. Vad är den geometriska betydelsen?
a) $I=(x-a,y-b)$, $a,b\in\mathbb{R}$ b) $I=(x^2+y^2)$ c) $I=(x^2+y^2+1)$
d) $I=(x^2+y^2-1,2x^2+y^2-2)$ e) $I=(x^2,xy)$ f) $I=(x^2y,xy^2)$

2. Bestäm ett ideal I s a $V(I)$ är unionen av (x_1,x_2)-planet och (x_3,x_4)-planet i $\mathbb{A}^4_k$. För $k=\mathbb{R}$ ange ett polynom med samma nollställenmängd.

3. Låt k vara en ändlig kropp. Visa att det finns för alla $P=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}^n_k$ ett polynom $f\in k[x_1,\dots,x_n]$ med $f(P)=1$, $f(Q)=0$ för alla $Q\in\mathbb{A}^n_k$, $Q\neq P$. Låt $M\subset\mathbb{A}^n_k$. Visa att $M=V(f)$ för ett lämpligt polynom f.

4. Reid 3.4, 3.8, 3.6, 3.7, 3.10, 3.11.

Inlämningsuppgifter, att lämnas in 2006-02-27.

1. a) Vilka av följande ringar är noetherska:
i) polynomringen $k[x_1,x_2,\dots,x_n,\dots]$ i oändligt många variabler $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$.
ii) ringen av alle potensserier $a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$ med konvergensradie >0, där alla $a_i\in\mathbb{C}$.
b) Är A en noethersk ring om $A[x]$ är noethersk?

2. Reid 3.5.

3. (jfr Reid 3.12 och 3.13)
a) Visa att en algebraisk mängd i $\mathbb{A}^1_k$ är antingen ändlig eller hela $\mathbb{A}^1_k$ (detta gäller för varje kropp k).
b) Låt $f,g\in k[x,y]$ vara polynom utan gemensam faktor. Visa att $V(f,g)$ är ändlig. (Ledning: resultanten)
c) Visa att varje algebraisk mängd $V\subset\mathbb{A}^2_k$ är en ändlig union av punkter och kurvor (=hyperytor).
d) Låt k vara en oändlig kropp och $f\in k[x_1,\dots,x_n]$ ett icke-konstant polynom. Visa att $V(f)\neq\mathbb{A}^n_k$.
e) Antag nu att k är algebraiskt sluten. Låt f som i d) ha ledande term på formen $a_m(x_1,\dots,x_{n-1})x_n^m$. Visa att när $a_m\neq 0$ finns det en ändlig icke-tom punktmängd i $V(f)$ för varje värde av $(x_1,\dots,x_{n-1})$. Visa att $V(f)$ är oändlig for $n\geq 2$.
f) Visa att två olika irreducibla polynom $f,g\in k[x,y]$ definierar två olika hyperytor i $\mathbb{A}^2_k$ om k är algebraiskt sluten.