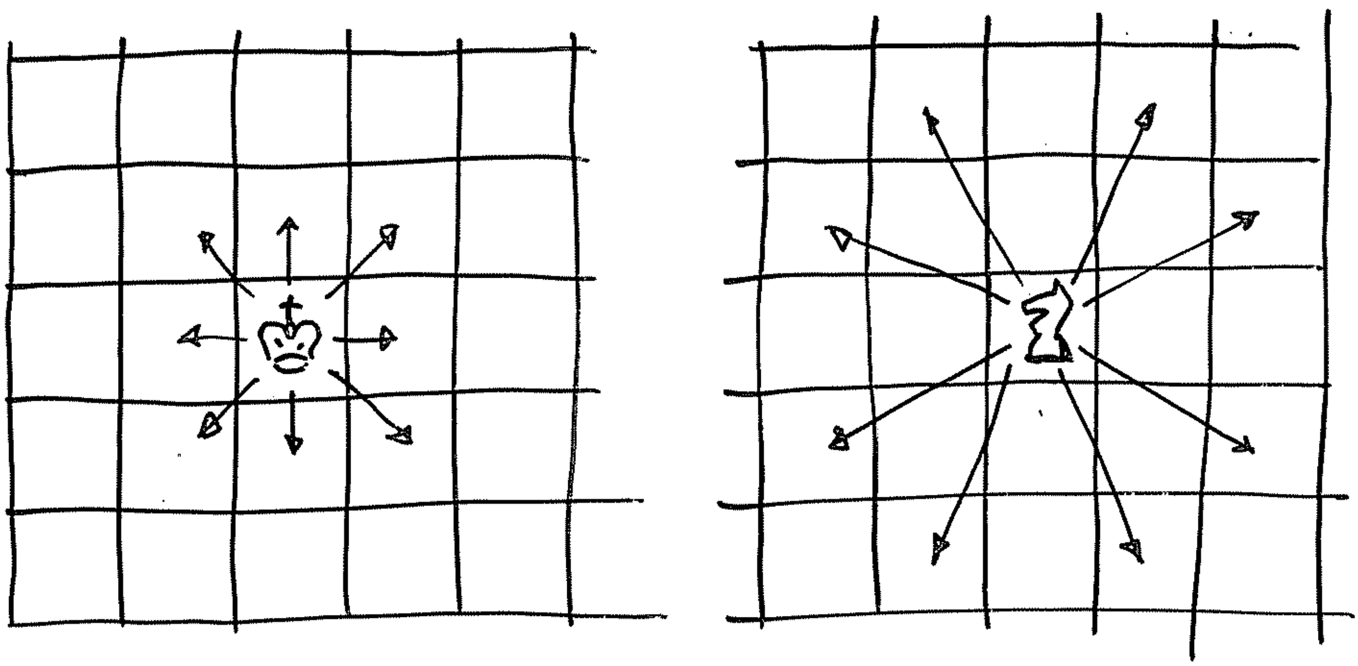
Ängelproblemet

Johan Wästlund

Matematikföreningen 2007-05-10

Ängel = Schackpjäs med
ändlig räckvidd

kung, springare



Ängeln och Djävulen spelar följande spel:

D "äter" en ruta, Ä gör ett drag osv.

Ä får inte gå till en uppäten ruta

D vinner om Ä inte kan flytta.

Finns en vinnande strategi för D?

Finns en strategi för Ä som gör att hon alltid klarar sig?

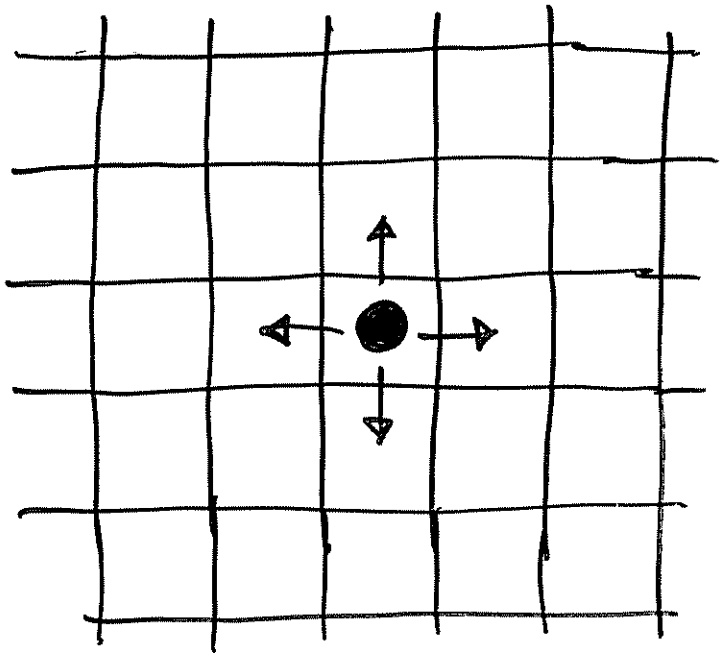
Ändlig frågeställning:

Finns det ett ändligt område som Ä inte kan ta sig ut ur?

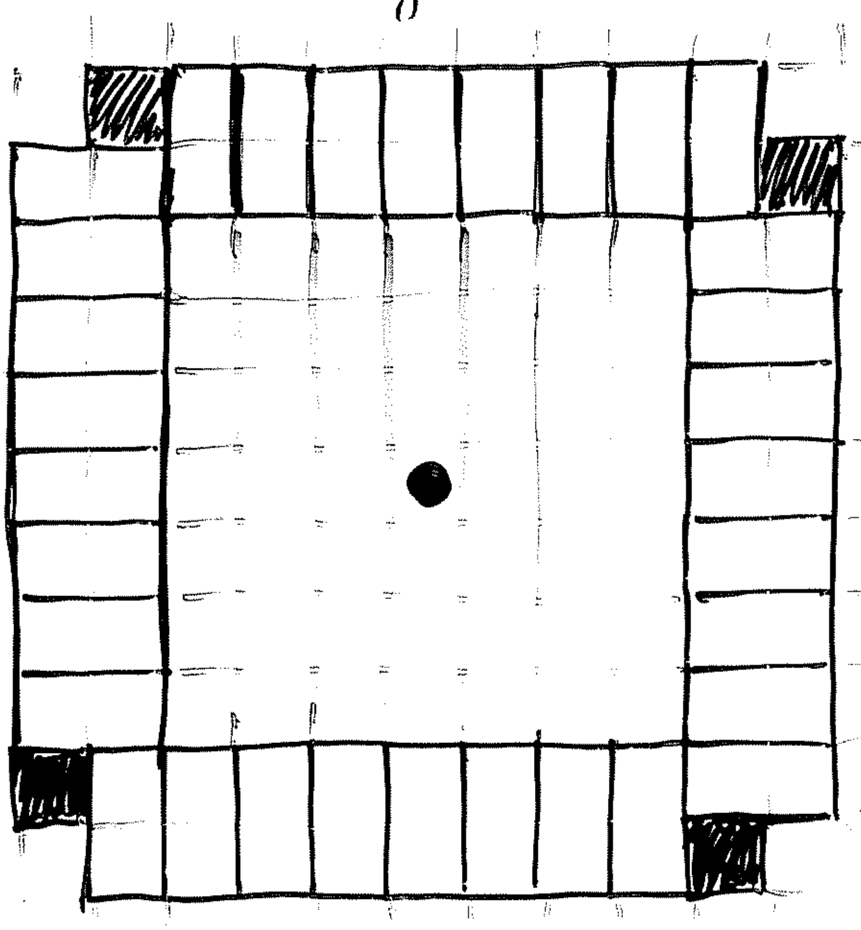
Svaret beror på hur ängeln får röra sig, dvs hur kraftfull den är.

Ex:

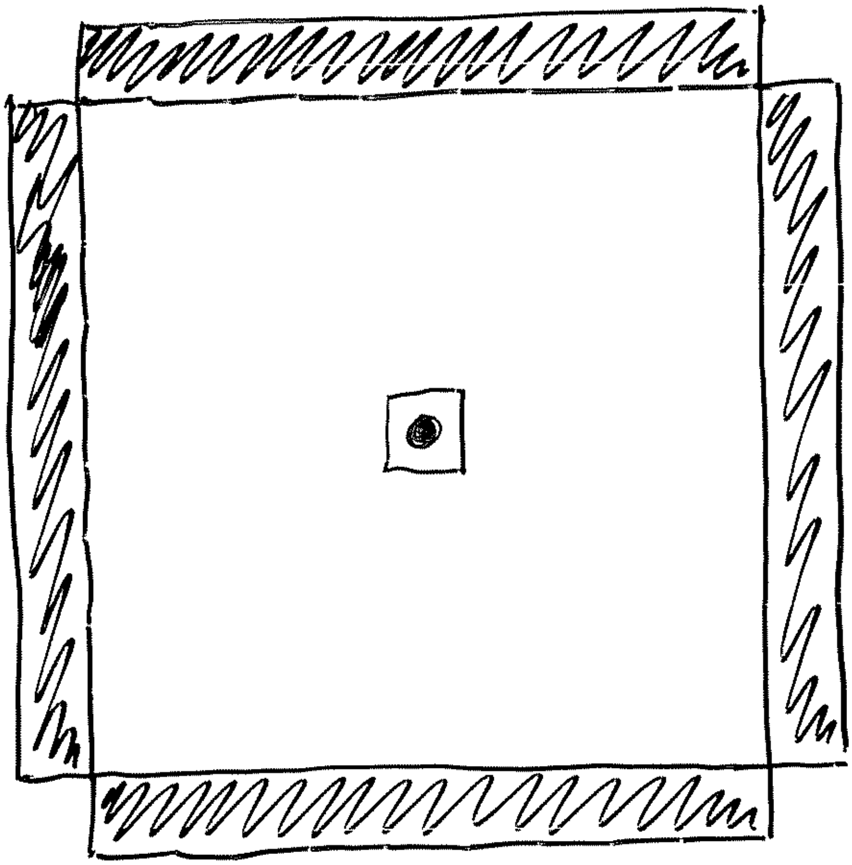
"Duke"



D kan fånga en "Duke"



Leder till



E. Berlekamp visade ~1980 att även en kung går att fånga in.

Ängelproblemet:

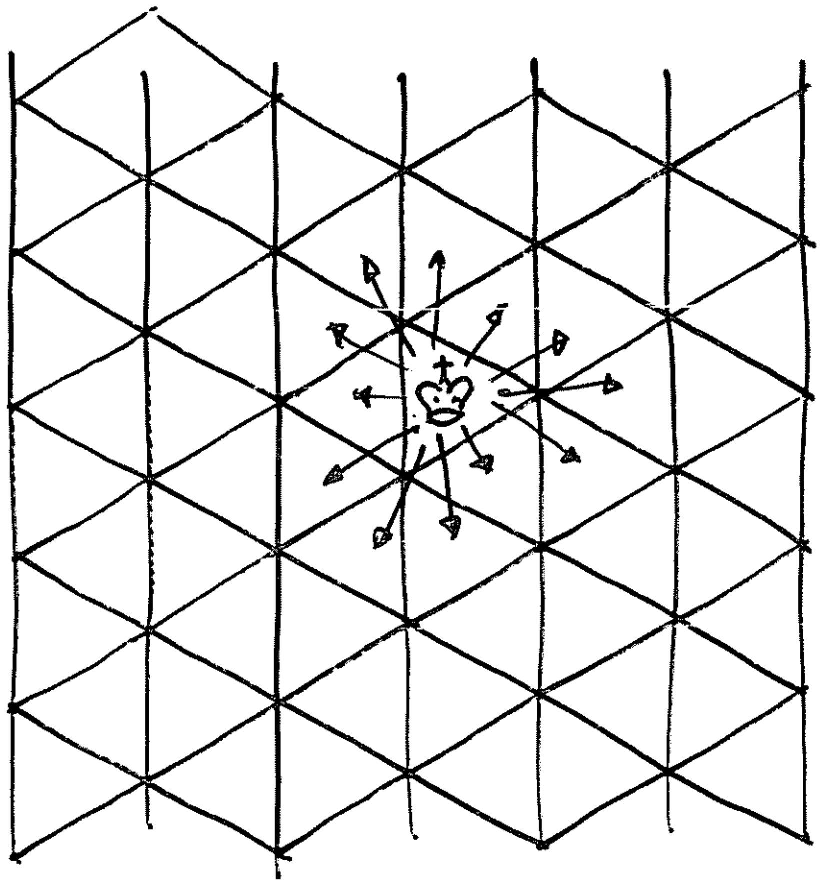
Finns det någon pjäs med ändlig räckvidd som inte kan fångas in av D?

J. Conway 1994:

$100 för bevis att en Ä klarar sig

$1000 för bevis att D vinner mot alla änglar.

Löstes hösten 2006 av Oddvar Kloster, András Máthé, Brian Bowditch och Péter Gács.



På ett triangulärt bräde
vinner en kung!

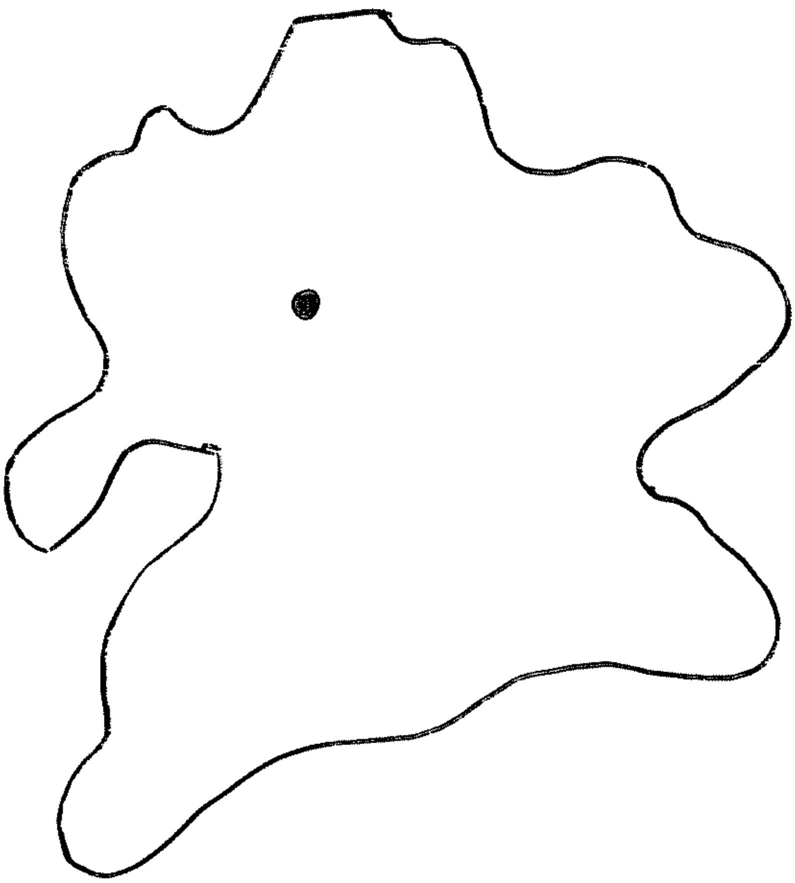
Varför är ängelproblemet svårt?

Finns ingen "lokal" strategi som vinner för Ä.

För att vinna måste Ä ta hänsyn till godtyckligt avlägsna drag av D.

Máthés lemma

Betrakta ett ändligt område
(ändlig mängd av rutor)



Antag att D kan hindra Ä från
att lämna detta område

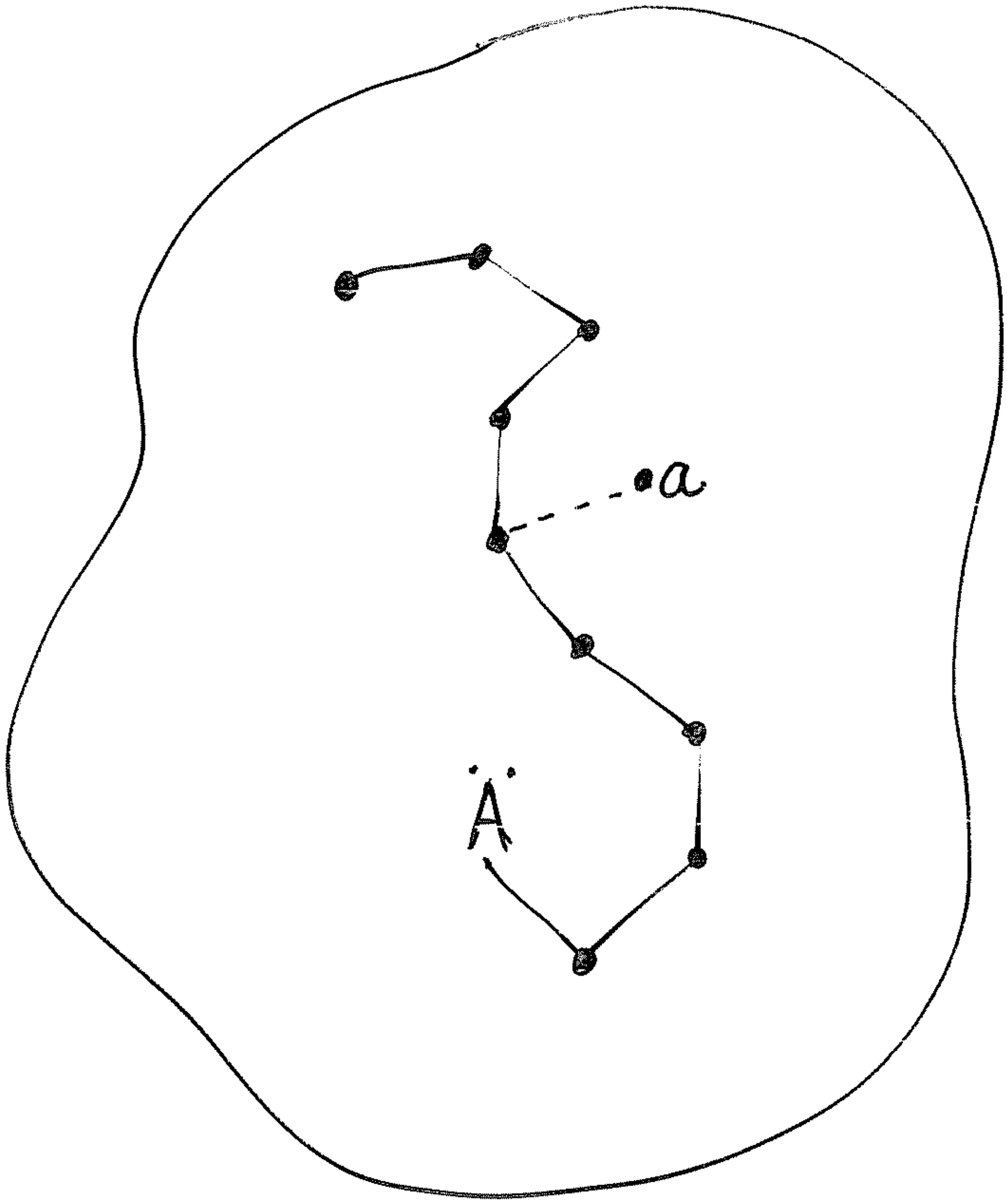
Då kan D åstadkomma detta utan att
någonsin äta en ruta som Ä har
stått på eller tidigare kunde ha
gått till.

Bakhåll = Drag av D där Ä tidigare har stått eller kunnat gå till

Snäll Djävul = D som aldrig gör bakhåll

Bevis: Induktion. Antag att D har en vinnande strategi som inte gör bakhåll under de n första dragen. Vi ska visa att då existerar en strategi som inte gör bakhåll i drag n+1 heller.

Antag att den strategi vi betraktar föreskriver att D ska äta en ruta a i drag n+1, och att Ä tidigare har kunnat gå till ruta a.

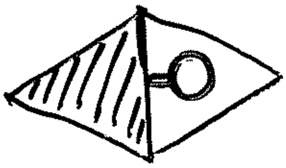


Modifierad strategi: Ät en ovidkommande ruta i drag n+1. Spela därefter enligt den givna strategin så länge Ä inte går till ruta a. Om Ä går till ruta a, spela som om hon gått dit första gången hon kunde.

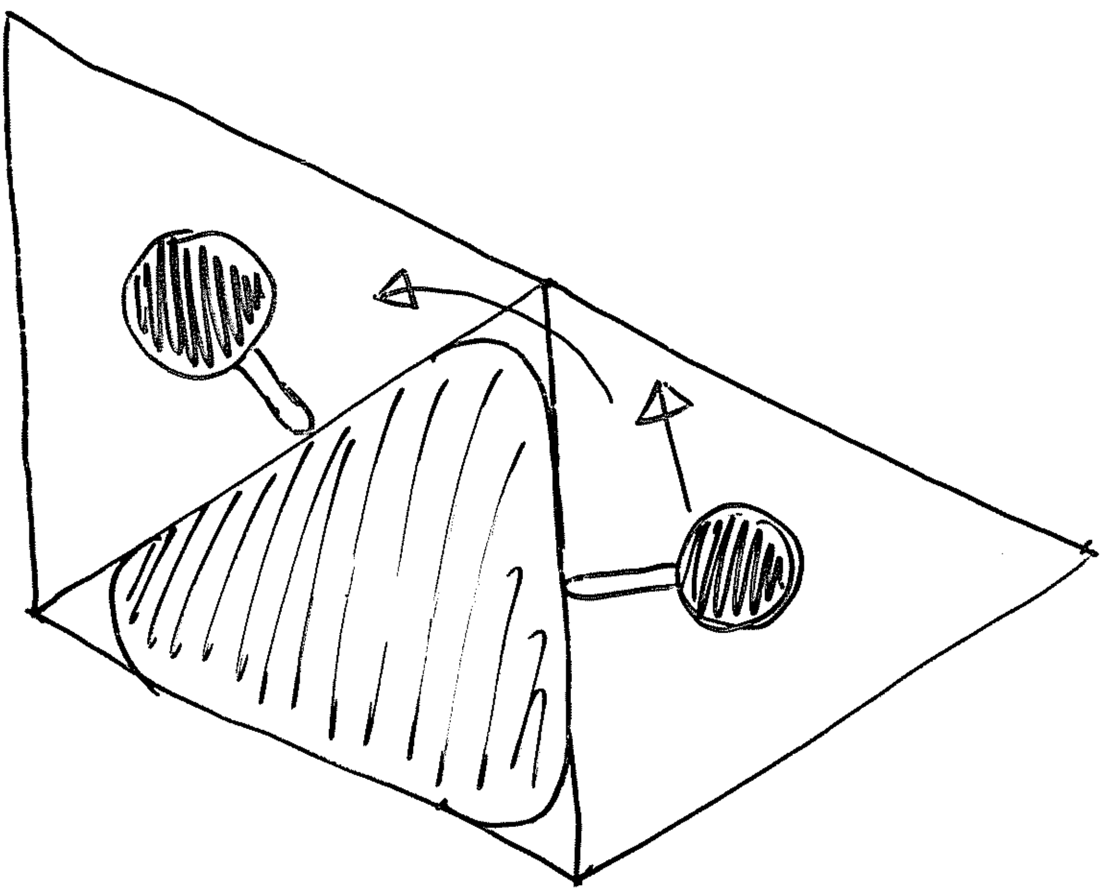
Slutsats: Det finns inget n för vilket D är tvungen att göra ett bakhåll under de första n dragen.

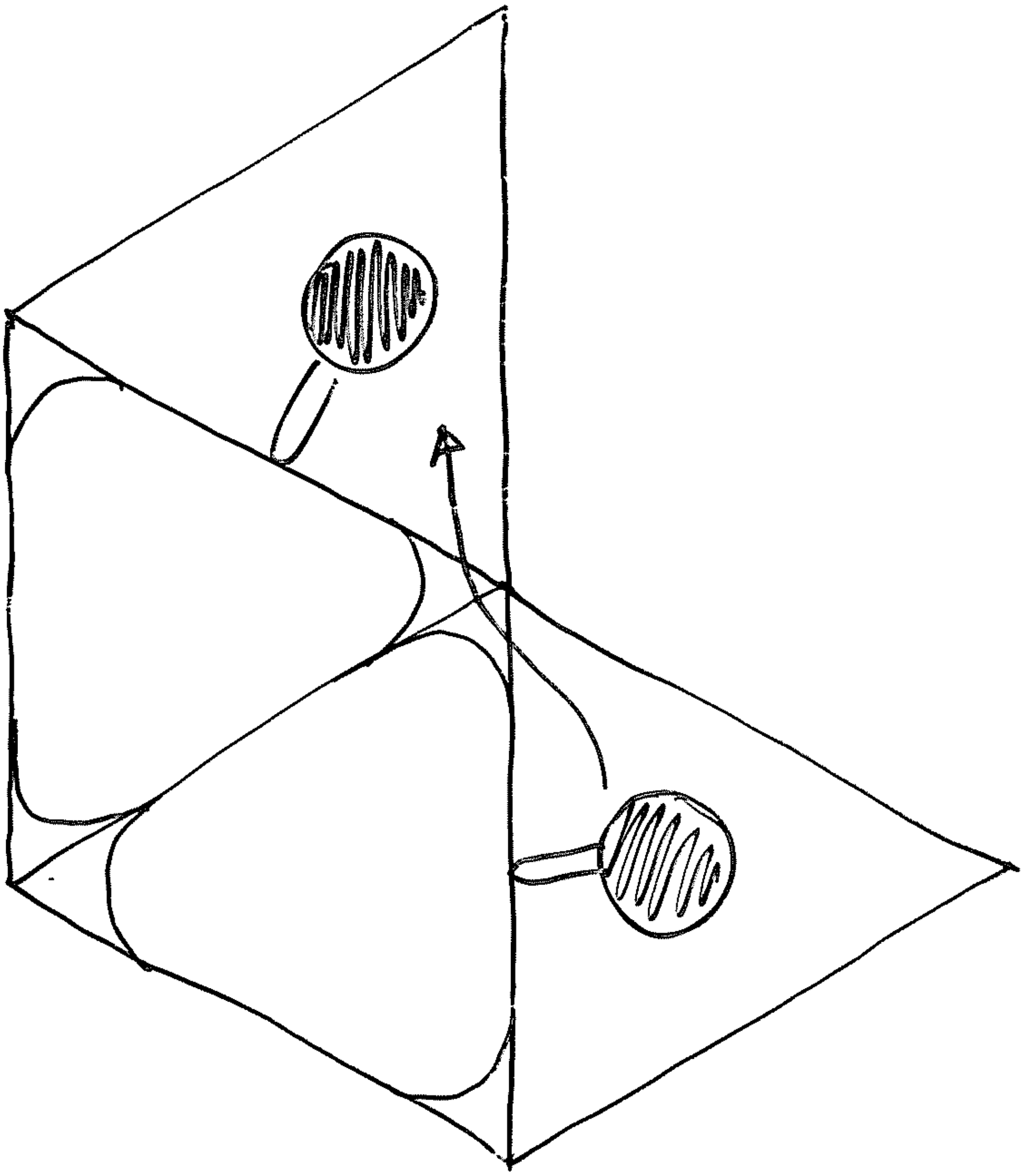
Om D alls kan vinna, kan han vinna utan bakhåll, dvs en snäll D kan vinna!

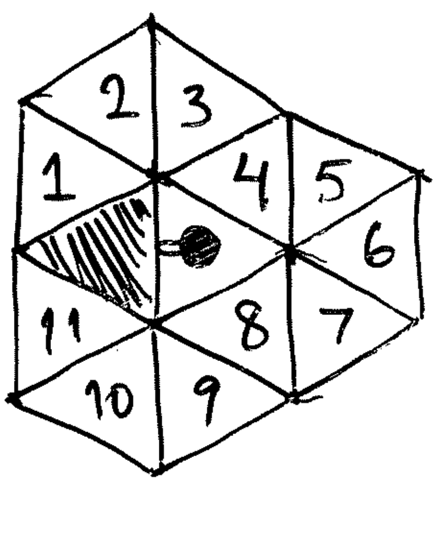
Nu är ängelproblemet inte längre svårt!

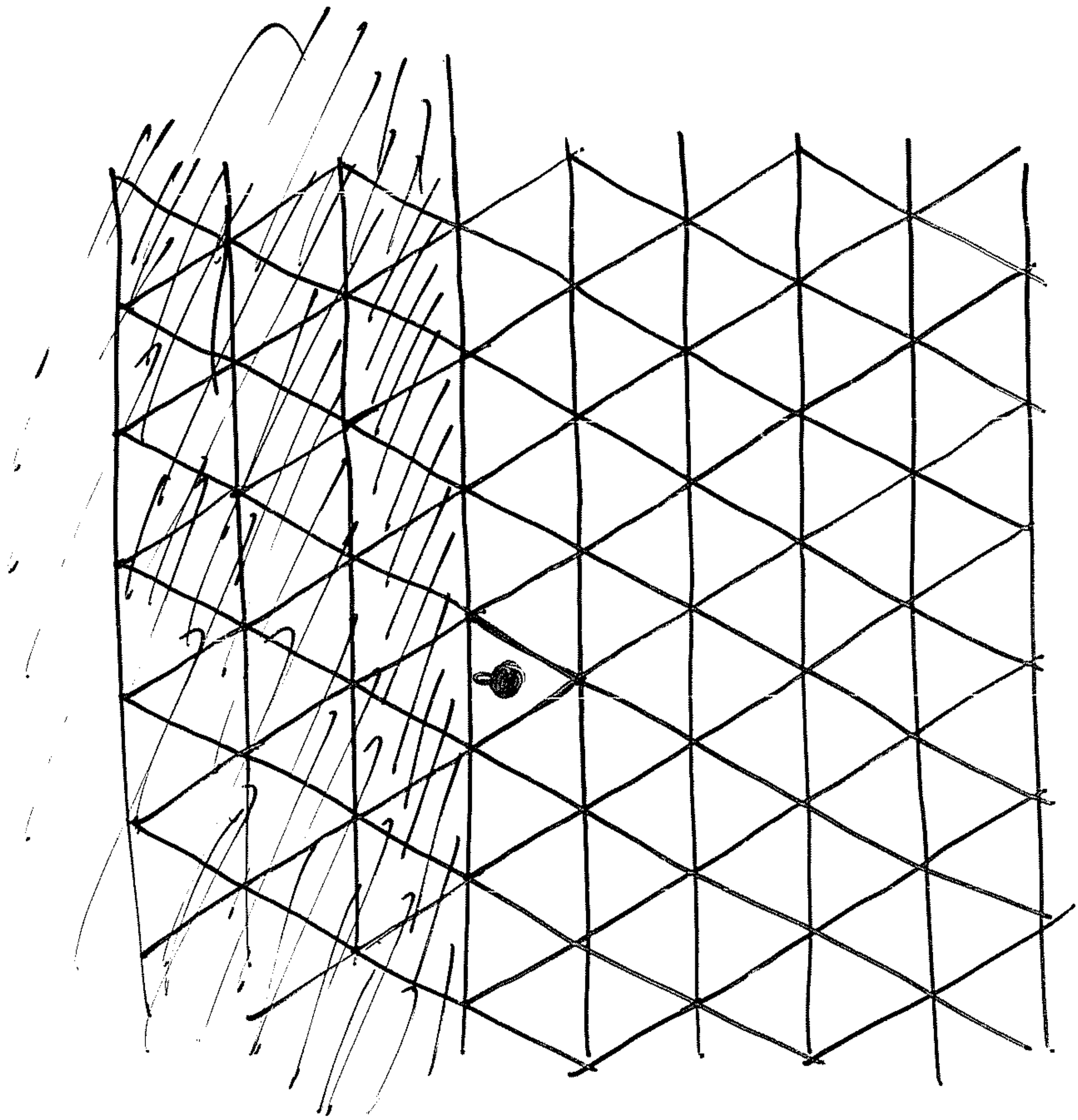


Ä följer kanten av en uppåten
ruta med vänster pekfinger



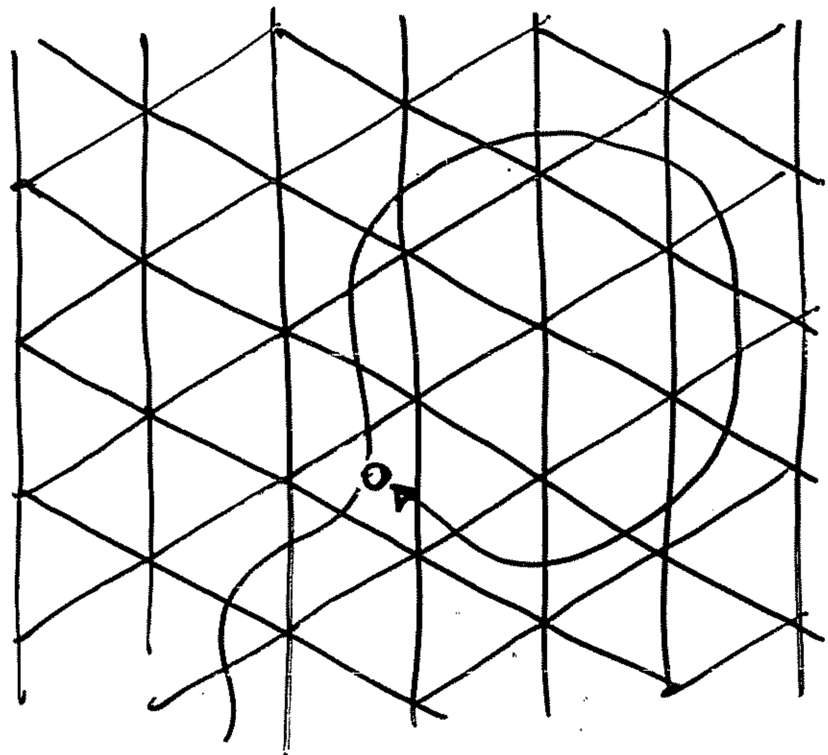


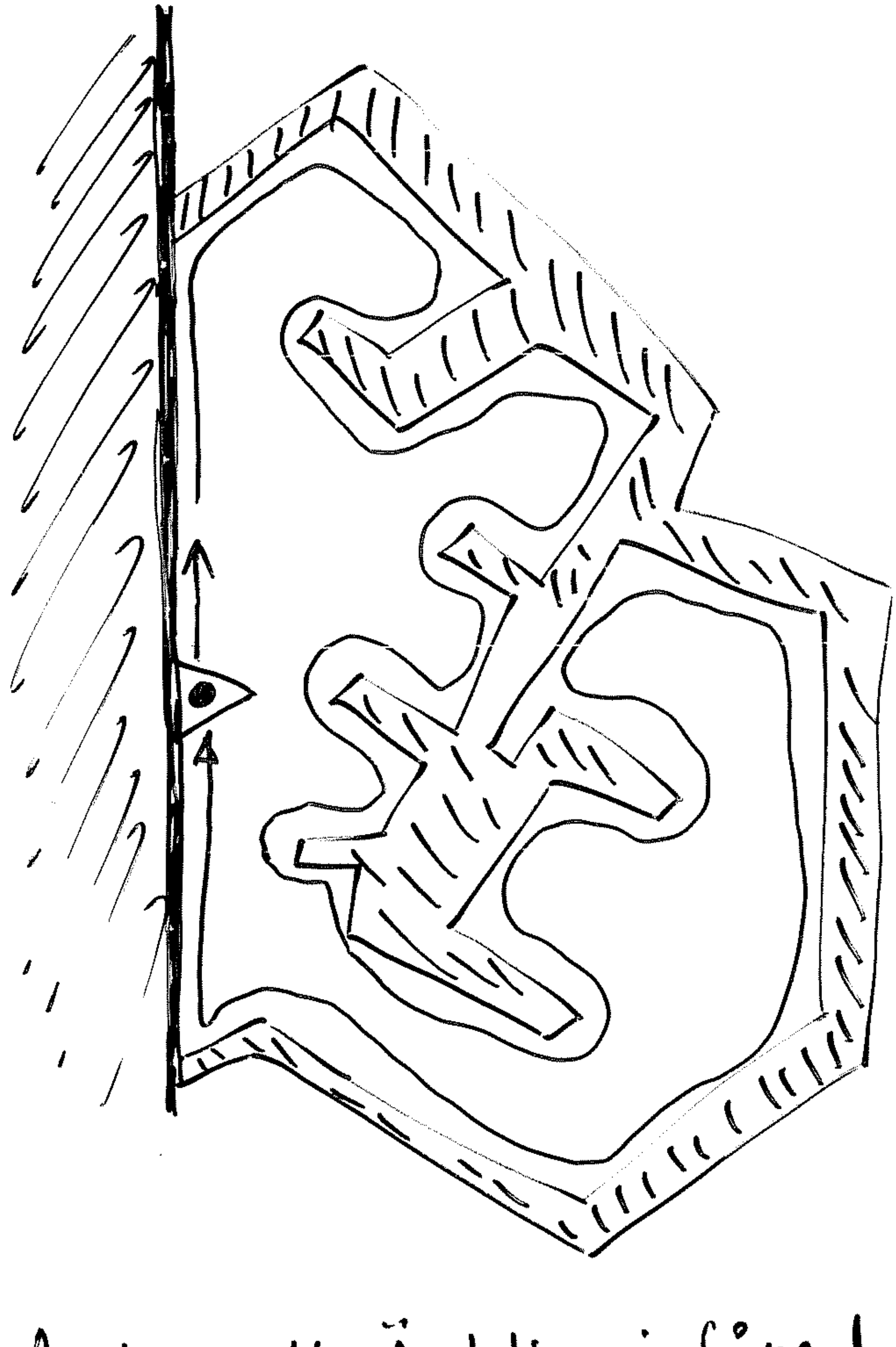

2
3
1
4
5
6
11
8
7
10
9



Om en snäll D fångar Ä, måste Ä till slut komma tillbaka till startrutan, vänd åt samma håll!

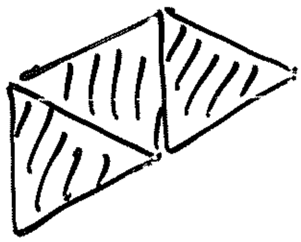
Ä måste hamna i en sluten bana, och en snäll D kan inte blockera spåret av Ä's pekfinger



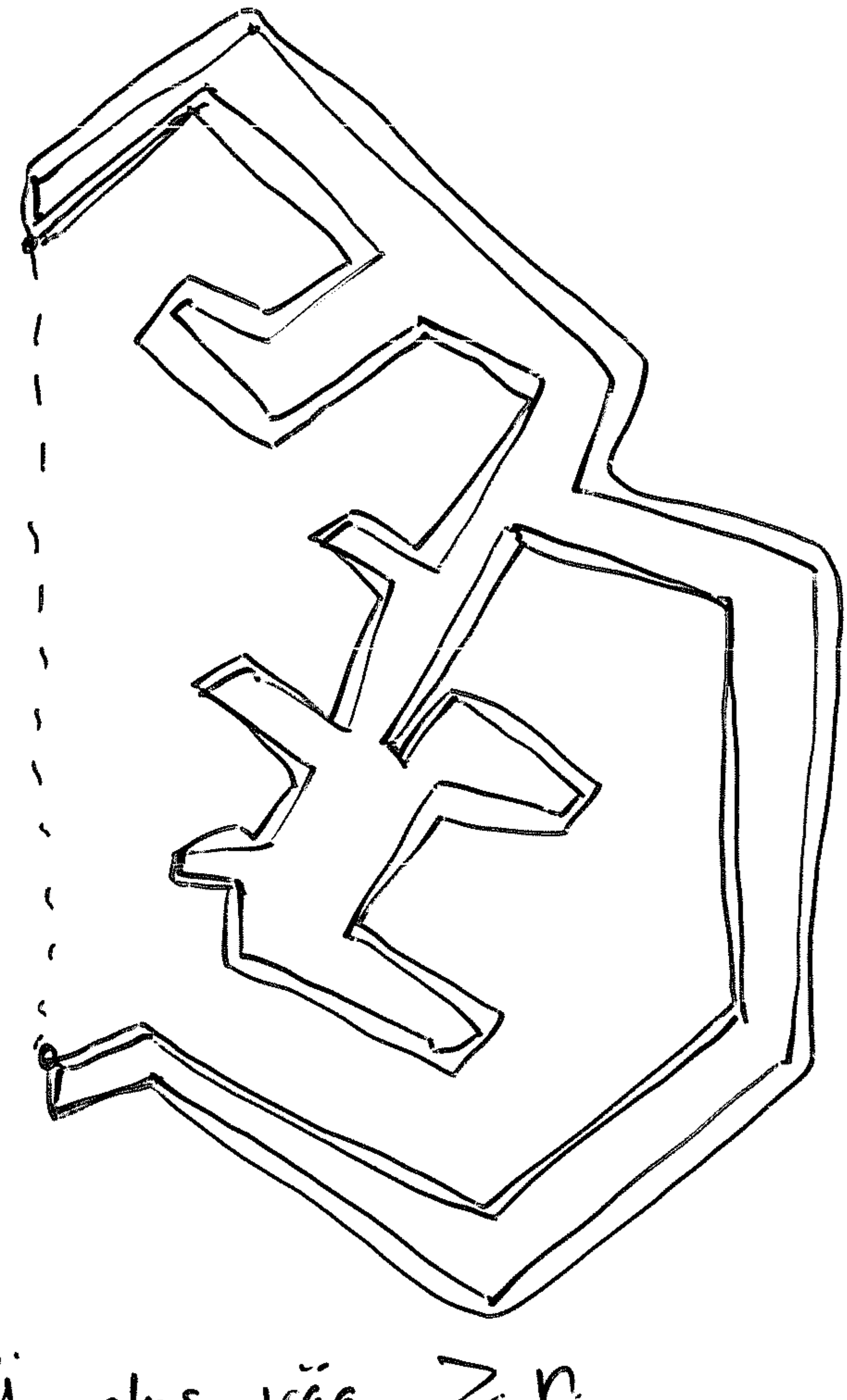


Antag att Ä blir infångad, och återvänder efter n drag.

Mängden av ätna rutor som fångar ängeln måste vara sammanhängande, och har därför omkrets högst $n+2$



Klistra på en ruta, ökar omkretsen med högst 1.

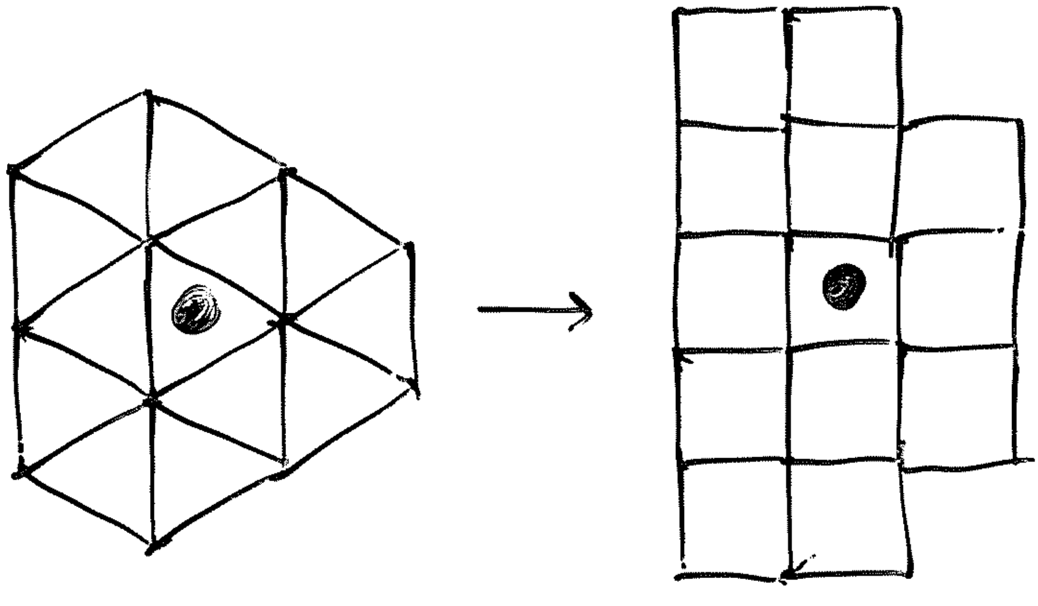


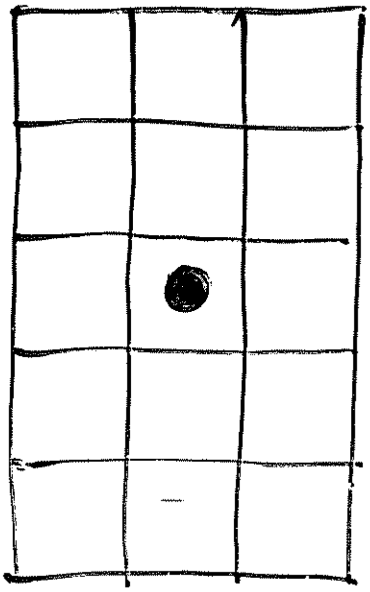
Ängelns väg $\geq n$.

Utsidan i stället, $> n+2$.

Beviset är klart!

Indirekt bevis, givetvis vinner inte pekfingerstrategin!





Vinnande Ä av styrka 14.

Klosters Ä har styrka 16