

Vorwort

Abgesehen von einigen stilistischen Änderungen ist die vorliegende Arbeit identisch mit einer Habilitationsschrift, die den Medizinischen Fachbereichen der Universität Mainz im Fach Medizinische Statistik und Dokumentation im Jahr 1976 vorgelegt wurde. Herrn Professor S. Koller danke ich, daß er diese Arbeit gefördert hat. Von ihm, meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Medizinische Statistik und am Institut für Mathematische Statistik erhielt ich zahlreiche Anregungen.

Die Programmierung der verschiedenen verwendeten Verfahren wurde insbesondere von den Herren T. Wehner, H. Gönner und B. K. Yun ausgeführt. Berechnungen bevor die Programme erstellt waren und solche zur Kontrolle der Programmausgaben wurden von Herrn H. Bücken besorgt. Herr O. Pietschmann fertigte mit Sorgfalt die meisten der Zeichnungen an, Herr S. Hermes führte die fototechnischen Arbeiten durch. Frau B. Gilbrin und Frau H. Bianco haben das Manuskript schnell und vorzüglich maschinengeschrieben. Ihnen allen danke ich herzlich.

Mein besonderer Dank geht an meine Lehrer Arthur P. Dempster und William G. Cochran. Sie sind mir ein Vorbild, wie man mit Freude kreativ und intensiv wissenschaftlich arbeiten kann. Durch sie habe ich schätzen gelernt, wie wichtig es ist, angewandte und mathematische Statistik eng miteinander zu verbinden.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Einleitung	1
2. Statistische Theorie und Rechenverfahren	6
2.1. Theorie der Kovarianzauswahl	11
2.2. Theorie der logarithmisch-linearen Modelle	14
2.3. Systematik einfacher Zusammenhangsstrukturen für normalverteilte und für multinominal verteilte Variable	21
2.4. Rechenverfahren und Computerprogramme	30
3. Anwendungen in der Medizin	32
3.1. Erkennen und Ausschalten der Wirkung von Hintergrund-Faktoren	34
3.1.1. Methodik	35
3.1.2. Anwendungsbeispiele	38
3.1.2.1 Klinikheterogenitäten	39
3.1.2.2 Anamnesefaktoren	45
3.1.3. Alternativverfahren	50
3.1.3.1 Standardisierte Chi-Quadrat- Werte	50
3.1.3.2 Randomisieren und Paarbildung	54
3.2. Datengesteuerte Suche nach Zusammenhangs- strukturen	59
3.2.1. Methodik	59
3.2.2. Anwendungsbeispiele	62
3.2.2.1 Modellsuche in Korrelations- matrizen	63
3.2.2.2 Modellsuche in Kontingenztafeln	75
3.2.3. Alternativverfahren	79
3.3. Prüfung vorgegebener Hypothesen über Zusammen- hangsstrukturen	81
3.3.1. Methodik	82
3.3.2. Anwendungsbeispiele	84

	Seite
3.3.2.1. Völlige Unabhängigkeit von Variablengruppen	84
3.3.2.2. Bedingte Unabhängigkeit einzelner Variablen	86
3.3.2.3. Mischtypen von Hypothesen	91
3.3.3. Alternativverfahren	93
3.3.3.1. Regressions- und Logitanalyse	94
3.3.3.2. Pfadkoeffizientenanalyse	95
4. Zusammenfassung	101
5. Datenanhang	103
6. Literaturverzeichnis	108

TABELLENVERZEICHNIS

Tabelle		Seite
1	Teiltafeln einer 2^3 -Kontingenztafel mit erwarteten Zellenwerten	17
2	Assoziationsmuster für vier Variable	27
3	Fiktives Beispiel zur Beurteilung der Wirkung von Hintergrund-Faktoren	54
4	Reserpineinnahme für Patientinnen verschiedener Altersgruppen	56
5	Auswahlschritte bei der Modellsuche für die Reifeindikatoren	67
6	Auswahlschritte bei der Modellsuche für die Persönlichkeitsmerkmale	74
7	Auswahlschritte bei der Modellsuche für die Symptome depressiver Patienten	77
8	Gestosesymptome bei 4856 Schwangeren	89
9	Symptome nach LSD-Einnahme bei 65 Probanden	90

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung		Seite
1	Einführendes Beispiel für quantitative Daten	8
2	Einführendes Beispiel für qualitative Daten	9
3	Hierarchie der dreidimensionalen Modelle	20
4	Schematische Darstellung einfacher Strukturtypen für eine vierdimensionale Korrelationsmatrix	23
5	Erstes hypothetisches Beispiel für einfache Strukturtypen in einer vierdimensionalen Korrelationsmatrix	25
6	Zweites hypothetisches Beispiel für einfache Strukturtypen in einer vierdimensionalen Korrelationsmatrix	26
7	Prüfergebnisse für den Zusammenhang zwischen Glukosurie der Mutter und Auffälligkeiten der Neugeborenen	40
8	Beobachtete und für Modell 12/13/23 erwartete Fallzahlen von Neugeborenen mit Auffälligkeiten (1), gegliedert nach Glukosurie der Mutter (2) und nach Kliniken (3)	41

Abbildung		Seite
9	Für Modell 12/13/23 und für Modell 13/23 erwartete Fallzahlen von Neugeborenen mit Auffälligkeiten (1), gegliedert nach Glukosurie der Mutter (2) und nach Kliniken (3)	42
10	Prüfergebnisse für den Zusammenhang zwischen Schwangerschaftsdauer und Schwangerschaftsausgang	43
11	Beobachtete und für Modell 12/13/23 erwartete Fallzahlen von Totgeburten (1), gegliedert nach Schwangerschaftsdauer (2) und nach Kliniken (3)	44
12	Für Modell 12/13/23 und für Modell 13/23 erwartete Fallzahlen von Totgeburten (1), gegliedert nach Schwangerschaftsdauer (2) und nach Kliniken (3)	45
13	Prüfergebnisse für den Zusammenhang zwischen psychosomatischen Beschwerden und Kinderwunsch	46
14	Beobachtete Prozentzahlen von erwünschter Schwangerschaft (1), gegliedert nach psychosomatischen Beschwerden (2) und nach verschiedenen Anamnese-faktoren (3)	47
15	Prüfergebnisse für den Zusammenhang zwischen psychosomatischen Beschwerden und früher praktizierter Konzeptionsverhütung	49

Abbildung		Seite
16	Früher praktizierte Konzeptions- verhütung, gegliedert nach Teil- kollektiven	49
17	Beobachtete und standardisierte Prozent- zahlen zu den Daten der Abbildungen 7, 10, 13 und 15	51
18	Beobachtete Häufigkeitsverteilungen von fünf Reifemerkmalen für 2.473 männliche und 2.276 weibliche Neugeborene	64
19	Beobachtete und durch Modell 1234/135 implizierte Korrelationen von Indikatoren der Reife; für männliche Neugeborene	65
20	Beobachtete und durch Modell 1234/135 implizierte Korrelationen von Indikatoren der Reife; für weibliche Neugeborene	65
21	Beobachtete Häufigkeitsverteilungen von neun Persönlichkeitsmerkmalen des Frei- burger Persönlichkeitsinventars (FPI) für 301 Probanden ohne klinische Befunde	70
22	Beobachtete und durch Modell 13568/234679 implizierte Korrelationen von Persönlich- keitsmerkmalen; für Probanden ohne klini- sche Befunde	71
23	Beobachtete und für Modell 24/14/13 erwartete Fallzahlen für vier Symptome; bei 362 psychiatrisch behandelten Probanden	76

Abbildung		Seite
24	Beispiele einfacher Strukturtypen und die zugehörigen Ergebnisse von Faktorenanalysen	80
25	Schematische Darstellung ausgewählter Modelle, die für drei Strukturgruppen typisch sind	83
26	Beobachtete und durch Modell 123/456 implizierte Korrelationen von Anamnese-faktoren (1,2,3) und Blutdruck- und Herzfrequenzänderungen (4,5,6)	85
27	Beobachtete Häufigkeitsverteilungen von sechs oszillographischen Messungen an 112 Probanden (in 10^{-2} sec)	87
28	Beobachtete und durch Modell 1456/2456/3456 implizierte Korrelationen oszillographischer Messungen am Oberarm (1,2,3) und am proximalen Abschnitt des Unterarms (4,5,6)	88
29	Beobachtete Häufigkeitsverteilungen von neun Persönlichkeitsmerkmalen des Freiburger Persönlichkeitsinventars (FPI) für 168 wegen Hypertonie behandelten Probanden	92
30	Beobachtete und durch Modell 13568/234679 implizierte Korrelationen von neun Persönlichkeitsmerkmalen; für Hypertoniker	93
31	Oszillographische Daten: Pfadkoeffizientendarstellung für Modell 1456/2456/3456	97

1. EINLEITUNG

Ein Berührungspunkt von Medizin, Psychologie und Biologie sind Forschungen, die den Menschen betreffen. Im Rahmen dieser Disziplinen wird untersucht, was die Ursachen von verschiedenen Veränderungen im Menschen sind, auf welche Weise sich solche Veränderungen manifestieren und welche Therapien möglich sind. Bei vielen Fragestellungen zwingen ethische und zeitliche Überlegungen den Forscher, Beobachtungen mehr oder minder passiv statt unter experimentellen Versuchsbedingungen zu sammeln. Infolgedessen kann die Zahl der gleichzeitig zu berücksichtigenden Größen nicht künstlich verringert werden, sondern bleibt groß. Aus diesem Grunde benötigen Mediziner, Psychologen und Biologen in besonderem Maße multivariate statistische Verfahren, die dabei helfen, komplexe Zusammenhänge zu erfassen, zu beschreiben und zu analysieren.

So einfach diese Forderung klingt, so schwierig ist es, sie in der Praxis zu erfüllen. Multivariate statistische Verfahren wurden erst in den letzten Jahrzehnten verstärkt von mathematischen Statistikern behandelt. Wegweisend waren die Arbeiten von R.A. Fisher, S.S. Wilks und H. Hotelling in den dreißiger und vierziger Jahren. In Amerika erschien das erste statistische Lehrbuch, das ausschließlich multivariate Methoden beschreibt, im Jahre 1958 (von T.W. Anderson). Im gleichen Jahr wurde bei der Konferenz der Internationalen Biometrischen Gesellschaft erstmals eine Vortragsreihe über multivariate Verfahren veranstaltet. Dennoch gibt es bis heute kein deutschsprachiges Lehrbuch, das ausschließlich multivariate Verfahren behandelt, und noch 1974 konnte ein mathematischer Statistiker bei einer medizinstatistischen Tagung unter Beifall äußern, daß jenen, die Studien mit mehr als zehn Variablen planten, das Handwerk verboten werden sollte. Nur einige wenige Spezialgebiete wurden bisher gleichzeitig von theoretisch wie von angewandt arbeitenden Statistikern untersucht. Besonders zu nennen sind dabei Sonderfälle der Theorie linearer Modelle wie die Varianz-

analyse, die Regressionsanalyse, oder die Kovarianz- und Diskriminanzanalyse. Diese Verfahren eignen sich zum Auswerten von quantitativ erfaßten Daten. Bei Verfahren zur Analyse zahlreicher qualitativer Variablen schritt die mathematische Forschung dagegen langsamer voran. Erst 1974, 1975 erschienen die ersten auch theoretisch ausgerichteten Bücher (R.L. Plackett, 1974; S. J. Haberman, 1974; Y.M.M. Bishop, S.E. Fienberg und P. Holland, 1975).

Da die gesamte multivariate statistische Methodik noch ein neues Gebiet ist, sind auch komplexere Zusammenhangsmodelle bisher nur vereinzelt beschrieben und anhand von Daten überprüft worden. Es war nicht bekannt, welche mathematisch-statistischen Theorien dazu hätten herangezogen werden können. Die zur einfachen Anwendung unabdingbaren Rechenverfahren fehlten. Zwar wurden bisher einige multivariate Verfahren zur Beantwortung von Fragen über Interdependenzbeziehungen verwendet, so etwa die Pfadkoeffizientenanalyse oder die Faktorenanalyse. Beide weisen jedoch wesentliche Nachteile auf. Die Pfadkoeffizientenanalyse wurde von dem Genetiker S. Wright (1923, 1934) vorgeschlagen und in den letzten Jahren vorwiegend von Soziologen wiederentdeckt (O.D. Duncan, 1966). Ihr Hauptnachteil ist, daß die zugrundeliegende statistische Theorie bisher nur unzureichend formuliert wurde. Die Faktorenanalyse wurde anfangs von Psychologen entwickelt und als methodisches Hilfsmittel geschätzt. Bei Biostatistikern ist sie etwa durch R.B. Catells (1965) Übersichtsarbeiten bekannt geworden. Der für den Anwender wichtigste Nachteil der Faktorenanalyse ist, daß die auffindbaren Strukturen nicht klar beschrieben werden können. Das bedeutet, daß bei jeder Untersuchung nur ad-hoc-Erklärungen möglich sind und daß auch eine einmal aufgefundene Struktur nicht als Hypothese so formuliert werden kann, daß sie an neuem Datenmaterial statistisch überprüfbar wäre.

Diese Arbeit bietet einen Beitrag zum besseren Verständnis bestimmter Zusammenhangsmodelle oder Zusammenhangsstrukturen.

Es werden solche Strukturen beschrieben und untersucht, bei denen das Gefüge der Beziehungen zwischen den einzelnen Größen durch Abhängigkeiten oder Unabhängigkeiten gekennzeichnet ist. Für qualitative und quantitative Variable werden Modelle der gleichen Art verwendet. Vorteile sind, daß damit für beide Arten von Variablen ein einheitliches Konzept besteht und daß bei Modellprüfungen nur Berechnungsformeln -je nach Art der untersuchten Variablen- modifiziert werden müssen. Erst vor kurzem (N. Wermuth, 1976a) gelang es, zwei mathematisch-statistische Theorien, die Theorie der logarithmisch-linearen Modelle (M.W. Birch, 1963), sowie die Theorie der Kovarianzselektion (A.P. Dempster, 1972) als Verfahren zum Studium solcher Zusammenhangsstrukturen darzustellen. Beide Theorien wurden ursprünglich nicht für diesen Zweck formuliert. Ein Rechenverfahren, das es ermöglicht, für eine gegebene Datenmenge eine gut passende Zusammenhangsstruktur aufzufinden, wurde ebenfalls unlängst vorgeschlagen (N. Wermuth, 1976b). Die zugehörigen Computerprogramme wurden inzwischen an anderer Stelle beschrieben (N. Wermuth, T. Wehner, H. Gönner, 1976).

Bei datengesteuerten Modellsuchen (N. Draper und H. Smith, 1966; N. Wermuth, 1976b) fragt man, welche Hypothesen oder Modelle es gibt, die mit den Beobachtungen, d.h. den Daten, vereinbar sind. Datengesteuerte Analysen gehören nicht zum traditionellen Aufgabenbereich der Statistik, in dem vorgegebene Hypothesen anhand eines Datenmaterials geprüft werden. Es ist jedoch offensichtlich eine Frage des Wissenstandes, ob im Einzelfall bereits klare Hypothesen über einen Untersuchungsgegenstand formuliert werden können oder nicht, und ob somit hypothesen- oder datengesteuerte Analysen angemessen sind. Zumindest in den angelsächsischen Ländern sind datengesteuerte Analysen als wichtiges Teilgebiet der Statistik anerkannt (vgl. J.W. Tukey, 1970). Da die Systematik der Zusammenhangsstrukturen und die Methodik der Modellsuche bereits an anderer Stelle ausführlich beschrieben wurden (N. Wermuth, 1976a,b), brauchen sie

in dieser Arbeit nur in abgekürzter Form dargestellt zu werden. Stattdessen können anwendungsbezogene Aspekte der Methodik stärker betont werden.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, anhand von mehreren Datenbeispielen zu zeigen, welche Zusammenhangsanalysen bei verschiedenen medizinischen Fragestellungen eingesetzt werden können. Das Gewicht in der Darstellung liegt auf Anwendungen der Methodik, nicht auf der inhaltlichen Interpretation. Die Daten stammen vorwiegend aus zwei von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projekten, nämlich aus der prospektiven Studie "Schwangerschaftsverlauf und Kindesentwicklung" und aus dem Sonderforschungsbereich 36. Darüber hinaus wird ein Überblick über statistische Verfahren gegeben, die bisher bei ähnlichen Fragestellungen herangezogen wurden, also als Alternativverfahren in Frage kommen. So werden die Beziehungen der hier vorgestellten Zusammenhangsanalyse zur Faktoren- und zur Pfadkoeffizientenanalyse, zur Regressions- und zur Logitanalyse kurz diskutiert sowie ihre Beziehungen zu solchen Verfahren, die die Strukturgleichheit eines Datenmaterials entweder sichern oder prüfen sollen, d.h. zur Paarbildung und zu Standardisierungstechniken.

Im einzelnen werden die Theorie der Kovarianzselektion und der logarithmisch-linearen Modelle kurz dargestellt (Kap. 2.1 und 2.2), um die formalen Ähnlichkeiten und die wichtigsten Unterschiede deutlich zu machen. Kap. 2.3 führt in die Systematik der prüfbaren Strukturen ein, während in Kap. 2.4 bereits vorhandene wie auch einige neu erstellte Computerprogramme vorgestellt werden, die für die Analysen verwendet werden können. Im Anschluß daran werden Anwendungsmöglichkeiten behandelt. Zunächst wird in Kap. 3.1 gezeigt, wie die genannten Verfahren dazu verwendet werden können, Einflüsse von sogenannten Stör- oder Hintergrundfaktoren zu erkennen. In Kap. 3.2 wird die datengesteuerte Suche nach einfachen Zusammenhangsstrukturen demonstriert.

In Kap. 3.3 schließlich wird vorgeführt, wie sich Hypothesen über Zusammenhangsstrukturen systematisieren lassen und wie sie geprüft werden können.

Da die einzelnen Datenanalysen den Leser anregen sollen, Probleme aus seinem eigenen Arbeitsgebiet auf ähnliche Weise zu lösen, werden die Rechenschritte so ausführlich beschrieben, daß sie ohne Schwierigkeiten nachvollzogen werden können, zumindest dann, wenn die zuvor genannten Computerprogramme mit herangezogen werden.

2. STATISTISCHE THEORIE UND RECHENVERFAHREN

Sowohl die Kovarianzselektion als auch das Anpassen logarithmisch-linearer Modelle an eine Kontingenztafel wurden zunächst als Verfahren zur Parameterreduktion angesehen, das heißt als Verfahren, die bei einem Mißverhältnis zwischen der Zahl der Beobachtungen und der Zahl der zu schätzenden Parameter Abhilfe zu schaffen suchen. So wurde zum Beispiel ein Rechenverfahren zum Anpassen logarithmisch-linearer Modelle vorgeschlagen und programmiert (Y.M.M. Bishop (1967)), das in einer Studie über die Todesfolgen mehrerer Narkosemittel benötigt wurde (National Halothane Study). In dieser Studie sollten für acht verschiedene Narkosemittel die Wahrscheinlichkeiten dafür, innerhalb von 6 Wochen nach der Narkose an hepatischer Nekrose zu sterben, geschätzt werden, und zwar aufgegliedert nach Alter und Geschlecht der Patienten, nach verschiedenen Risikofaktoren, nach früheren Operationen und nach Operationsmethoden. Auch bei sehr großem Datenmaterial konnte man nicht erwarten, Beobachtungswerte für jede einzelne Untergruppe zu erhalten. Infolgedessen mußten spezielle Verfahren (wie das Anpassen logarithmisch-linearer Modelle) herangezogen werden, um dennoch die Wahrscheinlichkeiten für jede der Untergruppen schätzen zu können. Die eigenständige Bedeutung einzelner Modelle wurde erst später untersucht (beispielsweise von L. A. Goodman (1970), Y.M.M. Bishop (1971), J.E. Grizzle, C.F. Starmer, G.G. Koch (1969), H.H. Ku, R. Varner, S. Kullback (1971), N. Wermuth (1976a,b)).

Auf den ersten Blick scheinen die Kovarianzselektion und logarithmisch-lineare Modelle wenig miteinander gemein zu haben. Bei der Kovarianzselektion wird angenommen, daß die quantitativen Variablen einer multivariaten Normalverteilung folgen, während für die logarithmisch-linearen Modelle gilt, daß die qualitativen Variablen multinomial verteilt sind. Beide Verteilungen sind jedoch lediglich Sonderfälle der multivariaten Exponentialfamilie; beide Theorien

können zur Datenanalyse genutzt werden, und beide eignen sich dazu, Zusammenhangsstrukturen zu untersuchen. Darüber hinaus lassen sich die dafür benötigten Rechenverfahren in analoger Weise formulieren.

Einführende Beispiele

Um zu verdeutlichen, wie sich eine Gruppe von quantitativen und eine Gruppe von qualitativen Variablen durch die gleiche Zusammenhangsstruktur kennzeichnen läßt, beschreiben wir zunächst für ein bestimmtes Modell zwei hypothetische Variablengruppen und zwei konstruierte Zahlenbeispiele. Wir wählen ein Zusammenhangsmodell für vier Variable, in dem die Variablen 2, 3, 4 für jede gegebene Ausprägung der ersten Variablen als (bedingt) unabhängig angenommen werden. Die Bezeichnung für dieses Modell, die in Kapitel 2.3 näher erläutert wird, ist 12/13/14.

Für die folgenden vier quantitativen Variablen kann man annehmen, daß Modell 12/13/14 ihre Interrelationen gut beschreibt. Die Variablen sind Alter (Variable 1), Hochsprungleistung (Variable 2), Anzahl der eigenen Zähne (Variable 3) und Akkomodationsfähigkeit des Auges (Variable 4) bei klinisch gesunden, erwachsenen Probanden. Die Variablen 2, 3 und 4 korrelieren alle deutlich mit dem Alter, mit der Variablen 1. Das bedeutet, daß eventuelle Abhängigkeiten zwischen sportlicher Leistung, Zahl der Zähne und Akkomodationsfähigkeit des Auges deswegen entstehen können, weil jede dieser Variablen ein grober Indikator für das Alter eines Probanden ist. Für gesunde Probanden gleichen Alters jedoch läßt die Zahl der Zähne in der Regel keinen Rückschluß auf die Akkomodationsfähigkeit des Auges oder die Hochsprungleistung zu, noch kann man Aussagen über die Anzahl der Zähne oder die Hochsprungleistung treffen, wenn man über die Akkomodationsfähigkeit informiert ist. Mit anderen Worten: bei gegebenen Altersstufen (Variable 1) treten die Ausprägungen jeder der drei weiteren Variablen unabhängig voneinander auf.

Ebenso kann man für die folgenden vier qualitativen Variablen annehmen, daß die gleiche Zusammenhangsstruktur (Modell 12/13/14) die Abhängigkeiten gut widerspiegelt. Die vier dichotomen Variablen sind Geschlecht (Variable 1), X-Beine (Variable 2), Beinbehaarung (Variable 3) und Kahlköpfigkeit (Variable 4) bei älteren Probanden. Die Variablen 2, 3 und 4 sind alle geschlechtsabhängig, also abhängig von der Ausprägung der Variablen 1. Aber weder bei weiblichen noch männlichen Probanden wird man aus vorhandenen X-Beinen auf Beinbehaarung oder Kahlköpfigkeit schließen können, noch kann man Aussagen über die Bein- form und die Beinbehaarung treffen, wenn man lediglich darüber informiert ist, ob Kahlköpfigkeit vorliegt oder nicht. Wiederum gilt, daß die Variablen 2, 3 und 4 für vorgegebene Ausprägungen der Variablen 1 als unabhängig angesehen werden können.

Nunmehr stellen wir zwei konstruierte Zahlenbeispiele für das Modell 12/13/14 vor. Die Zahlen sind so gewählt, daß die Modellannahmen genau zutreffen und daß die einfachen Korrelationen der quantitativen (Abb. 1) und der qualitativen (Abb. 2) Variablen übereinstimmen.

Korrelationen		Modell 12/13/14 Variable		Partielle Korrelationen (nach Ausschaltung zweier Variablen)	
		1			
	.600	2		.423	
.704		3		.000	.559
.612	.422	4		.000	.436
.367				.000	
.431					

Abb. 1: Einführendes Beispiel für quantitative Daten.
(Diese Art der Darstellung einer Korrelationsmatrix wurde von K.-H. Schicketanz übernommen (1974)).

In Abb. 1 sind für jedes der quantitativen Variablenpaare einfache (linke Seite) und partielle (rechte Seite) Korrelationskoeffizienten angegeben. Es läßt sich zeigen, daß es ausreicht, die Assoziationen zwischen den Variablenpaaren (1,2), (1,3) und (1,4) zu kennen, um die Assoziationen zwischen allen sechs Variablenpaaren zu erklären oder zu reproduzieren.

Im einzelnen ist dies leicht nachzuprüfen. So gilt folgendes für die Korrelationskoeffizienten der Variablenpaare (2,3), (2,4) und (3,4):

$$\begin{aligned} r_{23} &= r_{12}r_{13} & 0,422 &= 0,600 \times 0,704 \\ r_{24} &= r_{12}r_{14} & \text{oder} & 0,367 = 0,600 \times 0,612 \\ r_{34} &= r_{13}r_{14} & & 0,431 = 0,704 \times 0,612. \end{aligned}$$

Für die qualitativen Variablen sind in Abb. 2 die Fallzahlen je Ausprägungskombination (m_{ijkl}) aufgeführt. Die Indices i, j, k, l bezeichnen dabei die Ausprägungen (+ oder -) der Variablen 1, 2, 3 und 4. Weiter ist angegeben, wie sich jede Fallzahl in der sogenannten vierdimensionalen Kontingenztafel aus den Fallzahlen der zuge-

Modell 12/13/14

	Variable				Fallzahlen				
	1	2	3	4	$m_{ijkl} = m_{ij..} \times m_{j.k} \times m_{i..l} \cdot \% m_{i...}$				
Ausprägungskombinationen	+	+	+	+	216	800	900	300	1000^2
	+	+	+	-	504	800	900	700	1000^2
	+	+	-	+	24	800	100	300	1000^2
	+	+	-	-	56	800	100	700	1000^2
	+	-	+	+	54	200	900	300	1000^2
	+	-	+	-	126	200	900	700	1000^2
	+	-	-	+	6	200	100	300	1000^2
	+	-	-	-	14	200	100	700	1000^2
	-	+	+	+	36	200	200	900	1000^2
	-	+	+	-	4	200	200	100	1000^2
	-	+	-	+	144	200	800	900	1000^2
	-	+	-	-	16	200	800	100	1000^2
	-	-	+	+	144	800	200	900	1000^2
	-	-	+	-	16	800	200	100	1000^2
	-	-	-	+	576	800	800	900	1000^2
	-	-	-	-	64	800	800	100	1000^2

Abb. 2: Einführendes Beispiel für qualitative Daten.

hörigen zweidimensionalen Randtafeln der Variablenpaare (1,2), (1,3), (1,4) errechnen läßt. Dabei ist zum Beispiel die Randtafel 12 folgendermaßen definiert:

Variable		Fallzahl	
1	2	$m_{ij..} =$	$\sum_{kl} m_{ijkl}$
+	+	800	= 216 + 504 + 24 + 56
+	-	200	= 54 + 126 + 6 + 14
-	+	200	= 36 + 4 + 144 + 16
-	-	800	= 144 + 16 + 576 + 64

Es ist eines der Kennzeichen der Strukturen, die in dieser Arbeit ausführlicher beschrieben werden, daß sich die Zusammenhänge aller Variablen aus denjenigen von Teilgruppen der Variablen erklären lassen. Ein weiteres Kennzeichen der einfacheren Zusammenhangsstrukturen ist es, daß bestimmte Variablenpaare bedingt unabhängig sind. So sind für Modell 12/13/14 die Paare (2,3), (2,4), (3,4) bedingt unabhängig gegeben Variable 1. Das zeigt sich für quantitative Variable in den partiellen Korrelationskoeffizienten (vergleiche Abb. 1) und für qualitative Variable bei einer Betrachtung der Fallzahlen in Teilkollektiven (Teiltafeln). Je mehr Variablenpaare bedingt unabhängig sind, desto einfacher läßt sich im allgemeinen das zugehörige Modell interpretieren. So besagt Modell 12/13/14, daß die Zusammenhänge zwischen den Variablen 2, 3 und 4 völlig verschwinden, wenn nur der Einfluß der Variablen 1 ausgeschaltet wird.

Unsere beiden Zahlenbeispiele wären nicht viel mehr als eine Spielerei oder eine rechnerische Kuriosität, ließen sie sich nicht als Sonderfälle der anfangs genannten Theorie der Kovarianzselektion und der Theorie der logarithmisch-linearen Modelle darstellen. Im Rahmen dieser Theorien werden die unter bestimmten verteilungstheoretischen Annahmen möglichen Zusammenhangsstrukturen deutlich

gekennzeichnet. Weiterhin wird angegeben, wie sich aus beobachteten Werten diejenigen Werte berechnen lassen, die unter bestimmten Modellannahmen zu erwarten sind. Schließlich liefern diese Theorien Kriterien, die es erlauben, die Abweichungen zwischen beobachteten und erwarteten Werten zu beurteilen. In dieser Reihenfolge werden nunmehr Teilaspekte der beiden Theorien kurz dargestellt, nämlich

1. die Parametrisierung, die zu den verschiedenen Modellen führt,
2. die Maximum-Likelihood-Schätzer und
3. die Likelihood-Quotienten-Prüfgrößen.

2.1 Theorie der Kovarianzauswahl

Für p gemeinsam normalverteilte Variable (mit Erwartungswert 0) gibt es gemeinhin, das heißt ohne zusätzliche Annahmen über die Art der Kovarianzstruktur, $p(p+1)/2$ Parameter, nämlich p den Varianzen und $(\frac{p}{2})$ den Kovarianzen entsprechende Parameter. Genauer gesagt läßt sich die Dichtefunktion von p multivariat normalverteilten Variablen mit unbekannter Kovarianzstruktur wie folgt schreiben:

$$(1) \quad f(\underline{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2} |\underline{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{x}\right\}.$$

Dabei ist \underline{x} ein $(p \times 1)$ -dimensionaler Vektor von Beobachtungen x_1, x_2, \dots, x_p , $\underline{\Sigma}$ und $\underline{\Sigma}^{-1}$ seien beide positiv definite symmetrische Matrizen. Dann sind die Elemente in den Positionen (i,j) , (i,i) der Matrix $\underline{\Sigma}$ die Kovarianz σ_{ij} zwischen x_i und x_j , beziehungsweise die Varianz σ_{ii} von x_i . Das (i,j) -te Element der Inversen $\underline{\Sigma}^{-1}$ wird die Konzentration von x_i und x_j genannt und mit σ^{ij} bezeichnet. Die Determinante $|\underline{\Sigma}|$ der Kovarianzmatrix $\underline{\Sigma}$ ist eine Skalarfunktion der Parameter σ^{ij} .

Werden den Parametern σ^{ij} keine Beschränkungen auferlegt, so erhält man den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\underline{\Sigma}}$ für die

Kovarianzstruktur $\underline{\Sigma}$ aus der beobachteten Kovarianzmatrix \underline{S} . Mit n Beobachtungen für jede der p Variablen ist das Element in der Position (i, j) der beobachteten Kovarianzmatrix sowie der beobachteten Korrelationsmatrix R durch

$$(2) \quad s_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^n (x_{il} - \bar{x}_i) (x_{jl} - \bar{x}_j); \quad r_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_{ii}^{1/2} s_{jj}^{1/2}}$$

definiert, wobei $\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n x_{il}$ den Mittelwert der i 'ten Variablen angibt. Für den Maximum-Likelihood Schätzer gilt sodann: $n \hat{\underline{\Sigma}} = (n-1) \underline{S}$.

Bei der Theorie der Kovarianzauswahl geht A.P. Dempster (1972) von der Situation aus, in der einige der Parameter σ^{ij} (für $i \neq j$) gleich Null gesetzt werden. Es sind in diesem Fall weniger als $p(p+1)/2$ Parameter zu schätzen; die Inverse der Kovarianzmatrix $\underline{\Sigma}^{-1}$ ist durch ein bestimmtes Muster von Nullen gekennzeichnet.

A.P. Dempster zeigt unter anderem, daß es unter diesen Bedingungen einen, und nur einen, Schätzer $\hat{\underline{\Sigma}}$ für $\underline{\Sigma}$ gibt, derart, daß jede Kovarianz, die nicht einer Null-Konzentration entspricht, nennen wir sie σ_{rt} , mit Hilfe der zugehörigen Stichprobenkovarianz geschätzt wird. Jedes (r, t) -Element in $\hat{\underline{\Sigma}}$ ist somit durch (2) bestimmt. Es ist $n \hat{\sigma}_{rt} = (n-1) s_{rt}$. Alle weiteren Elemente in $\hat{\underline{\Sigma}}$ sind durch das Muster der Nullen in $\underline{\Sigma}^{-1}$ impliziert und stimmen im allgemeinen nicht mit den beobachteten Kovarianzen überein. Die so definierte Matrix $\hat{\underline{\Sigma}}$ ist ein Maximum-Likelihood-Schätzer. A.P. Dempster schlägt zwei verschiedene Rechenverfahren vor, mit denen $\hat{\underline{\Sigma}}$ im Einzelfall bestimmt werden kann: einen Newton-Raphson-Algorithmus und einen zyklischen Anpassungsalgorithmus. Beide Verfahren sind rechentechnisch aufwendig, da zahlreiche Iterationen nötig sind, ehe man den Schätzer erhält. Ein verkürzter programmierter Algorithmus wurde von N. Wermuth, E. Scheidt (1977) vorgeschlagen.

Die Likelihoodfunktion, L , für die Dichte in (1) ist proportional (\propto) der Determinante von $\hat{\Sigma}$, wenn die Parameter σ_{ij} durch die Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\sigma}_{ij}$ ersetzt werden:

$$(3) \quad L = \prod_{i=1}^n f(x_i) \propto |\hat{\Sigma}|^{-n/2} .$$

Bezeichnen nun L_1 und L_2 die Likelihoodfunktionen für zwei verschiedene Kovarianzstrukturen, $\hat{\Sigma}_1$ und $\hat{\Sigma}_2$, so erhält man die - für große Beobachtungszahlen - annähernd Chi-Quadrat-verteilte Likelihood-Quotienten-Prüfgröße (LQ- χ^2) als

$$(4) \quad \text{LQ-}\chi^2 = -n \ln \frac{|\hat{\Sigma}_1|}{|\hat{\Sigma}_2|} .$$

Daß sich die Modelle der Kovarianzauswahl nicht nur zur Parameterreduktion, sondern auch dazu eignen, Zusammenhangsstrukturen zu untersuchen, wurde von N. Wermuth (1976a) betont. Dort wird gezeigt, daß eine Konzentration ein Vielfaches eines partiellen Korrelationskoeffizienten ist und daß sich infolgedessen jedes der oben beschriebenen Modelle durch einfache Unabhängigkeitshypothesen beziehungsweise Zusammenhangsstrukturen charakterisieren läßt. Wenn $\rho_{ij.k}$ den partiellen Korrelationskoeffizienten zwischen x_i und x_j unter Ausschaltung aller $(p-2)$ anderen Variablen bezeichnet, so läßt sich $\rho_{ij.k}$ als einfache Funktion der Elemente in der inversen Kovarianzmatrix schreiben:

$$(5) \quad \rho_{ij.k} = \frac{-\sigma^{ij}}{(\sigma^{ii}\sigma^{jj})^{1/2}} .$$

Somit folgt aus einer Nullkonzentration $\sigma^{ij} = 0$, daß der partielle Korrelationskoeffizient $\rho_{ij.k}$ gleich Null ist.

In der genannten Arbeit wird weiter gezeigt, wie sich die Likelihoodprüfgröße für ein bestimmtes Modell leicht berechnen läßt, ohne daß der Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\Sigma}$

explizit bestimmt werden muß. Darüberhinaus wird für einige Modelle der Schätzer $\hat{\xi}$ in geschlossener Form dargestellt. Eine Zusammenfassung dieser Ergebnisse für $p=4$ Variable wird in Kapitel 2.3 gegeben.

2.2. Theorie der logarithmisch-linearen Modelle

Für p diskrete Variable, von denen angenommen wird, daß sie multinomial verteilt sind, ist die Zahl der Parameter in Modellen für verschiedene Zusammenhangsstrukturen von der Anzahl der Klassen oder Ausprägungen pro Variable abhängig. Gegeben sei ein bestimmtes Kontingenz von n Beobachtungen. Jede einzelne Beobachtung wird nach den Ausprägungskombinationen (i_1, i_2, \dots, i_p) der p Variablen klassifiziert. Dabei habe die j -te Variable $i_j = 1, \dots, I_j$ Kategorien (für $j=1, \dots, p$). Man erhält auf diese Weise eine sogenannte p -dimensionale Kontingenztafel mit $\prod_j I_j$ Zellen. Es sei n_{i_1, i_2, \dots, i_p} die beobachtete und m_{i_1, i_2, \dots, i_p} die erwartete Fallzahl in der Zelle (i_1, i_2, \dots, i_p) . Dann lassen sich die Multinomialverteilung, die Likelihood und die Likelihood-Quotientenprüfgrößen (LQ- χ^2) wie folgt schreiben ($\forall i_j, \forall j$):

$$P = \frac{(n!)(n^{-n})}{\prod_{i_1, i_2, \dots, i_p} (n_{i_1, i_2, \dots, i_p})!} \prod_{i_1, i_2, \dots, i_p} (m_{i_1, i_2, \dots, i_p})^{n_{i_1, i_2, \dots, i_p}}$$

$$L \propto \prod_{i_1, i_2, \dots, i_p} (m_{i_1, i_2, \dots, i_p})^{n_{i_1, i_2, \dots, i_p}} \quad (6)$$

$$LQ-\chi^2 = -2 \ln \left[\prod_{i_1, i_2, \dots, i_p} \left(\frac{\hat{m}}{\hat{m}} \right)^{n_{i_1, i_2, \dots, i_p}} \right].$$

Dabei bezeichnen \hat{m} und \hat{m} die Maximum-Likelihood-Schätzer für zwei verschiedene Modelle. Mit Hilfe der Prüfgröße $LQ-\chi^2$ läßt sich beurteilen, wie sehr die beiden Schätzer voneinander abweichen.

Man spricht von einem logarithmisch-linearen Modell, weil der Logarithmus der erwarteten Fallzahl m_{i_1, i_2, \dots, i_p} sich als Summe mehrerer Parameter schreiben läßt. Diese Parameter werden hier mit u bezeichnet. Im sogenannten gesättigten Modell (L. Goodman, 1970) ist die Zahl der unabhängigen Parameter gleich der um eins reduzierten Zahl der Zellen, also gleich $(\prod_j I_j) - 1$.

Für eine dreidimensionale Kontingenztafel schreiben wir ein solches Modell aus. Es sei $(i_1, i_2, i_3) = (i, j, k)$ und $(I_1, I_2, I_3 = I, J, K)$. Dann gilt im sogenannten gesättigten Modell:

$$(7) \quad \ln m_{ijk} = u + u_1(i) + u_2(j) + u_3(k) \\ + u_{12}(ij) + u_{13}(ik) + u_{23}(jk) \\ + u_{123}(ijk)$$

$$\text{mit } \begin{aligned} \sum_i u_1(i) &= \sum_j u_2(j) = \sum_k u_3(k) = 0 \\ \sum_j u_{12}(ij) &= \sum_k u_{13}(ik) = 0 \quad \forall i \\ \sum_i u_{12}(ij) &= \sum_k u_{23}(jk) = 0 \quad \forall j \\ \sum_j u_{23}(jk) &= \sum_i u_{13}(ik) = 0 \quad \forall k \end{aligned}$$

$$\text{und } \begin{aligned} \sum_i u_{123}(ijk) &= 0 \quad \forall jk \\ \sum_j u_{123}(ijk) &= 0 \quad \forall ik \\ \sum_k u_{123}(ijk) &= 0 \quad \forall ij \end{aligned}$$

Aus (7) ist ersichtlich, daß es insgesamt $I \times J \times K (= 1 + (I-1) + (J-1) + (K-1) + (I-1)(J-1) + (I-1)(K-1) + (J-1)(K-1) + (I-1)(J-1)(K-1))$ Parameter gibt, wenn keine zusätzlichen vereinfachenden Annahmen hinsichtlich der Parameter gemacht werden. Die Parameter des logarithmisch-linearen Modells werden - in Analogie zur Varianzanalyse- als Interaktionen und Haupt-

effekte interpretiert.

Die suffizienten Statistiken für die einzelnen Parameter sind die entsprechenden beobachteten Randtafeln (vgl. etwa Y.M.M. Bishop, 1969). Beispielsweise ist die eindimensionale Randtafel der ersten Variablen $n_{i..} = \sum_{jk} n_{ijk}$ suffizient für $u_1(i)$, den Haupteffekt der ersten Variablen; $n_{.ij.} = \sum_k n_{ijk}$ und n_{ijk} sind suffizient für $u_{12}(ij)$, beziehungsweise für $u_{123}(ijk)$.

Für das gesättigte Modell (7) ist die gesamte dreidimensionale Kontingenztabelle, also n_{ijk} (für alle i, j, k), die minimal suffiziente Statistik. Das bedeutet, daß sich die Daten nicht reduzieren lassen, ohne daß Information verloren geht (E.L. Lehmann (1959)).

Parameterreduktionen oder Zusammenhangsmodelle ergeben sich dadurch, daß mehrere der im gesättigten Modell aufgeführten Parameter oder Interaktionen gleich Null gesetzt und infolgedessen nicht mehr geschätzt werden müssen. Wir werden im Folgenden die sich ergebenden Modelle im dreidimensionalen Fall etwas ausführlicher darstellen.

Bei drei Variablen interessieren im allgemeinen vier verschiedene Modelle:

- (a) es gibt keine Drei-Faktor-Interaktion,
- (b) es fehlen die Drei-Faktor- und eine Zwei-Faktor-Interaktion (= 1 bedingt unabhängiges Paar),
- (c) es fehlen die Drei-Faktor- und zwei Zwei-Faktor-Interaktionen (= 2 bedingt unabhängige Paare),
- (d) es gibt keine Interaktionen, nur Haupteffekte (= 3 bedingt unabhängige Paare).

Die Definition der Drei-Faktor-Interaktion in einer Kontingenztabelle ist in der Literatur nicht einheitlich. Es gibt einerseits die multiplikative (hier verwendete) Definition, die auf M.S. Bartlett (1935) und S.N. Roy und M.A. Kastenbaum (1956) zurückgeht, sowie die additive Definition von

H.O. Lancaster (1969). Eine vorzügliche Diskussion der Vor- und Nachteile jeder dieser Definitionen findet man bei J.N. Darroch (1974, 1976).

Das Vorhandensein oder Fehlen von Interaktionen läßt sich am einfachsten an den Teiltafeln einer 2^3 -Tafel darstellen (Tab. 1). Bevor wir zeigen, was eine fehlende Dreifaktor-Interaktion beinhaltet, geben wir zunächst eine Definition für die bedingte Unabhängigkeit eines Paares, d.h. für das Fehlen der Drei- und einer Zwei-Faktor-Interaktion.

Tab. 1: Teiltafeln einer 2^3 -Kontingenztafel mit erwarteten Zellenwerten m_{ijk}

		Variable 1						
		+			-			
		Variable 2			Variable 2			
Var. 3		+	-		Var. 3	+	-	
+		m_{111}	m_{121}	$m_{1.1}$	+	m_{211}	m_{221}	$m_{2.1}$
-		m_{112}	m_{122}	$m_{1.2}$	-	m_{212}	m_{222}	$m_{2.2}$
		$m_{11.}$	$m_{12.}$	$m_{1..}$		$m_{21.}$	$m_{22.}$	$m_{2..}$

Die Variablen 2 und 3 sind bedingt unabhängig, das heißt unabhängig für jede Ausprägung der ersten Variablen, wenn

$$(8) \quad m_{1jk} = \frac{m_{1j.} \cdot m_{1.k}}{m_{1..}} \quad \text{und} \quad m_{2jk} = \frac{m_{2j.} \cdot m_{2.k}}{m_{2..}} \quad \forall jk$$

gilt. Diese Definition beinhaltet z.B., daß Proportionen mit und ohne Aufgliederung nach der zweiten Variablen gleich sein müssen. So gilt beispielsweise

$$m_{121}/m_{12.} = m_{1.1}/m_{1..} .$$

Es ist leicht zu zeigen, daß (9) in der 2^3 -Tafel eine zu (8) äquivalente Definition darstellt:

$$(9) \quad \frac{m_{111}m_{122}}{m_{112}m_{121}} = \frac{m_{211}m_{222}}{m_{212}m_{221}} = 1.$$

Hierbei handelt es sich um zwei sogenannte Kreuzprodukt-Verhältnisse (K.P.V.). Haben beide K.P.V. einen Wert von Eins, so sind die Variablen 2 und 3 bedingt unabhängig. Von einer fehlenden Drei-Faktor-Interaktion spricht man, wenn die partiellen Assoziationen in allen Teiltafeln (im Sinne des Kreuzprodukt-Verhältnisses) gleich sind. M.W. Birch (1963) zeigte, daß die Forderung $u_{123}(ijk) = 0$ und die Forderung nach gleichen Assoziationen in Teiltafeln gleichbedeutend sind. Die Verallgemeinerung von (9) auf beliebige Kontingenztafeln wird dort ebenfalls dargestellt.

Für Fall (a), den Fall ohne Drei-Faktor-Interaktion oder Modell 12/13/23 gilt (für zweiklassige Variable):

$$(10) \quad u_{123}(ijk) = 0 \Leftrightarrow \frac{m_{111}m_{122}}{m_{112}m_{121}} = \frac{m_{211}m_{222}}{m_{212}m_{221}} .$$

Die minimal suffizienten Statistiken für die Parameter dieses Modells sind die zweidimensionalen Randtafeln der Variablenpaare 12, 13 und 23. Die Bezeichnung dieses Modells mit 12/13/23 soll dies deutlich machen. Außerdem stimmen bei diesem Modell alle drei beobachteten zweidimensionalen Randtafeln mit den Randtafeln der Maximum-Likelihood-Schätzer überein:

$$(11) \quad \hat{m}_{ij.} = n_{ij.}; \hat{m}_{i.k} = n_{i.k}; \hat{m}_{.jk} = n_{.jk} .$$

Als Beispiel für Fall (b) beschreiben wir Modell 12/13. Laut Modell fehlen die Drei-Faktor-Interaktion und die Zwei-Faktor-Interaktion der Variablen 2 und 3, die Zahl der Parameter ist noch geringer. Es gilt $u_{123}(ijk)=u_{23}(jk)=0$ oder

$$(12) \quad \ln m_{ijk} = u + u_1(i) + u_2(j) + u_3(k) + u_{12}(ij) + u_{13}(ik) \quad \forall ijk$$

Die Zahl der zu Null gesetzten Parameter bestimmt die Freiheitsgrade eines Modells. So erhält man für Modell 12/13 von $u_{123}(ijk)=0$ $(I-1)(J-1)(K-1)$ und von $u_{23}(jk)=0$ $(J-1)(K-1)$ Freiheitsgrade.

Es läßt sich nun zeigen, daß die in (12) dargestellte Parametrisierung gleichbedeutend ist mit der Forderung, daß sich jeder (erwartete) Zellenwert aus den zweidimensionalen Randtafeln 12 und 13 multiplikativ errechnen lassen muß (Y. M.M. Bishop und F. Mosteller (1969)). Genau gilt

$$(13) \quad u_{123}(ijk) = u_{23}(jk) = 0 \Leftrightarrow m_{ijk} = \frac{m_{ij.} \cdot m_{i.k}}{m_{i..}} \quad \forall ijk.$$

Aus (12), (13) und (8) ist zu ersehen, daß Modell 12/13 auf verschiedene Weise interpretiert werden kann. Es ist einerseits ein Modell mit zwei Zwei-Faktor-Interaktionen, andererseits ein Modell mit genau einem bedingt unabhängigen Variablenpaar, dem Paar (2,3). Die Maximum-Likelihood-Schätzer in diesem Modell sind $\hat{m}_{ijk} = n_{ij.} \cdot n_{i.k} / n_{i..}$. Infolgedessen stimmen die beobachteten Randtafeln 12, 13 wieder mit den geschätzten Randtafeln überein. Für die Randtafel der Variablen 23 ist dies dagegen -im Unterschied zu Modell 12/13/23- im allgemeinen nicht mehr der Fall.

Unter Fall (c) gibt es drei Modelle mit nur einer Zwei-Faktor-Interaktion: die Modelle 12/3, 13/2 oder 23/1. Zum Beispiel läßt sich Modell 12/3 durch jede einzelne der in (14) angegebenen Bedingungen gleichwertig charakterisieren:

$$(14) \quad \ln m_{ijk} = u + u_1(i) + u_2(j) + u_3(k) + u_{12}(ij) \quad \forall ijk$$

$$m_{ijk} = \frac{m_{ij.} \cdot m_{.k}}{m_{...}} \quad \forall ijk$$

$$1 = \frac{m_{111}m_{122}}{m_{112}m_{121}} = \frac{m_{211}m_{222}}{m_{212}m_{221}} = \frac{m_{111}m_{212}}{m_{112}m_{211}} = \frac{m_{121}m_{222}}{m_{122}m_{221}}$$

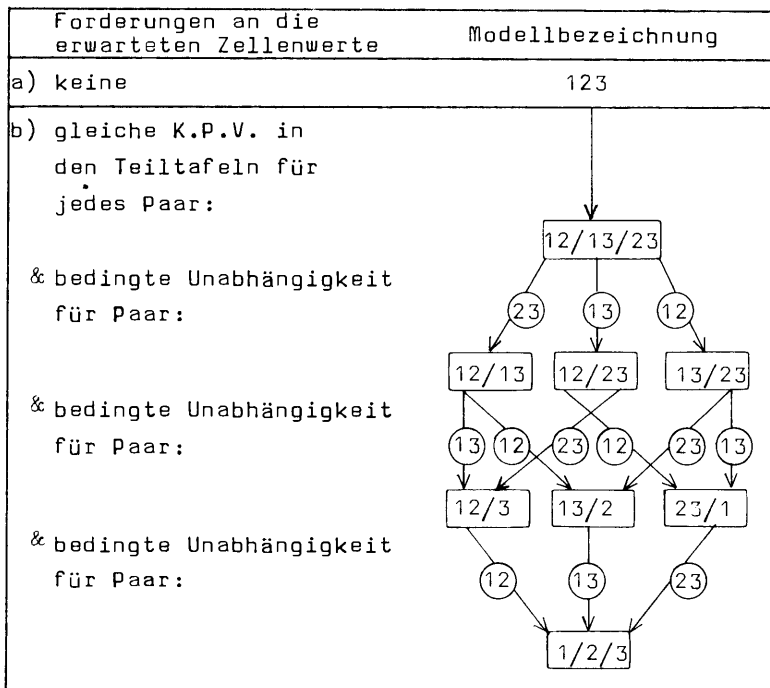
Für dieses Modell wird somit die bedingte Unabhängigkeit der beiden Variablenpaare 23 und 13 gefordert. Die Variable 3 ist von den Variablen 1 und 2, zusammen, völlig unabhängig.

Schließlich bleibt noch Fall (d) (Modell 1/2/3) zu erwähnen, in dem die eindimensionalen Randtafeln minimal suffiziente Statistiken sind. Es ist dies das Modell ohne Interaktionen, mit drei bedingt unabhängigen Variablenpaaren und somit mit drei völlig voneinander unabhängigen Variablen:

$$(15) \ln m_{ijk} = u + u_1(i) + u_2(j) + u_3(k) \quad \forall ijk$$

$$m_{ijk} = \frac{m_{i..} \cdot m_{.j.} \cdot m_{..k}}{m_{...}} \quad \forall ijk$$

Abb. 3: Hierarchie der dreidimensionalen Modelle



K.P.V. = Kreuzprodukt-Verhältnisse

Bei drei Variablen gibt es acht verschiedene (ungesättigte) Modelle, bei vier Variablen sind es bereits 113 hierarchische Modelle (L. Goodman 1970; Y.M.M. Bishop, 1971). Für viele dieser Modelle ist es schwierig, sachlich sinnvolle Interpretationen zu finden. Das ist kein Nachteil, solange die Suche nach einem passenden logarithmisch-linearen Modell nur dazu dient, die Zahl der Parameter zu verringern. Ist es jedoch das Ziel einer Untersuchung, Zusammenhänge zwischen mehreren Variablen zu durchleuchten, so wird es sinnvoll, sich auf jene Modelle zu konzentrieren, die relativ einfach zu interpretieren sind.

2.3. Systematik einfacher Zusammenhangsstrukturen für normalverteilte und multinominal verteilte Variable

Als einfache Zusammenhangsstrukturen oder Assoziationsmuster kann man solche Strukturen bezeichnen, die sich durch Unabhängigkeiten charakterisieren lassen und für die keine iterativen Rechenverfahren verwendet werden müssen, wenn man Schätzwerte und Prüfgrößen berechnen will. Diese Zusammenhangsstrukturen oder Modelle lassen sich relativ leicht interpretieren und die erforderlichen Berechnungen bereiten keine große Mühe. Im Zusammenhang mit Kontingenztafeln nannte man sie multiplikative Modelle (L.A. Goodman (1970)). Die Bezeichnung rührt daher, daß jeder einzelne erwartete Zellenwert sich multiplikativ aus Randsummenbesetzungen ergibt (z.B. Y.M.M. Bishop, 1971). beziehungsweise daher, daß sich die Likelihoodfunktion faktorisieren läßt. Ähnliches gilt für einfache Zusammenhangsstrukturen normalverteilter Variabler (N. Wermuth, 1976a).

Will man ein gegebenes Modell interpretieren, so ist es nötig, die Unabhängigkeitsbedingungen zu kennen, durch die es charakterisiert ist. Diese Bedingungen lassen sich für jedes Modell aus der Zahl und der Konstellation der bedingt unabhängigen Variablenpaare ableiten. Als Beispiel

beschreiben wir, wie sich die Interpretation des Modells 123/14 herleiten läßt. Alle Variablenpaare, die nicht in der Bezeichnung eines multiplikativen Modells vorkommen, sind als bedingt unabhängige Variablenpaare anzusehen. Bei insgesamt vier Variablen, gibt es sechs verschiedene Variablenpaare. In der Bezeichnung 123/14 sind die Paare (1,2), (1,3), (2,3) und (1,4) enthalten, dagegen fehlen die Paare (2,4) und (3,4). Laut Modellannahme ist deren partielle Assoziation gegeben die restlichen Variablen somit gleich Null. Bei normalverteilten Variablen folgt daraus, daß die partiellen Korrelationskoeffizienten $\rho_{24.13} = \rho_{34.12} = 0$ sein müssen. Aus dieser Forderung und der Definition der partiellen Korrelationskoeffizienten folgt, daß sowohl $\rho_{24.1} = \rho_{23.1}\rho_{34.1}$ als auch $\rho_{34.1} = \rho_{23.1}\rho_{24.1}$ zutreffen muß. Beides kann aber nur gelten, wenn $\rho_{24.1} = \rho_{34.1} = 0$ und $\rho_{23.14} = \rho_{23.1}$ sind. In dieser Konstellation von partiellen Korrelationen spiegelt sich wider, daß die Variablenpaare (2,4) und (3,4) auch dann unabhängig sind, wenn nur der Einfluß einer Variablen, der Variablen 1 ausgeschaltet wird. Die übliche Interpretation des Modells 123/14 schließt sich nunmehr unmittelbar an: Gegeben die Variable 1 ist Variable 4 unabhängig von der gemeinsamen Variablen 23.

Eine schematische Darstellung der verschiedenen möglichen multiplikativen Modelle für insgesamt vier Variable wird in Abb. 4 gegeben. In dieser Abbildung bedeutet "bekannte Partialkorrelation", daß der partielle Korrelationskoeffizient (nach Ausschalten zweier Variablen) den Wert Null hat, und daß somit das zugehörige Variablenpaar bedingt unabhängig ist. Es läßt sich ablesen, welche Konstellation von bedingt unabhängigen Variablenpaaren zu jedem einzelnen der Modelle gehört. Weiterhin ist zu sehen, daß die marginale Korrelation eines jeden bedingt unabhängigen Variablenpaares durch die Korrelation der bedingt abhängigen Variablenpaare impliziert wird.

Modell- bezeichnung	Korrelationen		Zahl der bedingt unabhängigen Variablen- paare																																								
	marginal	partial																																									
1234	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> </table>	1	x				2	x	x			3	x	x	x		4	x	x	x	x	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr> </table>	1	-				2	-	-			3	-	-	-		4	-	-	-	-	0
1	x																																										
2	x	x																																									
3	x	x	x																																								
4	x	x	x	x																																							
1	-																																										
2	-	-																																									
3	-	-	-																																								
4	-	-	-	-																																							
123/124	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>x</td><td>x</td><td>-</td><td>x</td></tr> </table>	1	x				2	x	x			3	x	x	x		4	x	x	-	x	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>-</td><td>x</td><td>-</td></tr> </table>	1	-				2	-	-			3	-	-	-		4	-	-	x	-	1
1	x																																										
2	x	x																																									
3	x	x	x																																								
4	x	x	-	x																																							
1	-																																										
2	-	-																																									
3	-	-	-																																								
4	-	-	x	-																																							
123/14	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>x</td><td>-</td><td>-</td><td>x</td></tr> </table>	1	x				2	x	x			3	x	x	x		4	x	-	-	x	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>x</td><td>x</td><td>-</td></tr> </table>	1	-				2	-	-			3	-	-	-		4	-	x	x	-	2
1	x																																										
2	x	x																																									
3	x	x	x																																								
4	x	-	-	x																																							
1	-																																										
2	-	-																																									
3	-	-	-																																								
4	-	x	x	-																																							
123/4	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>x</td></tr> </table>	1	x				2	x	x			3	x	x	x		4	-	-	-	x	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>-</td></tr> </table>	1	-				2	-	-			3	-	-	-		4	x	x	x	-	3
1	x																																										
2	x	x																																									
3	x	x	x																																								
4	-	-	-	x																																							
1	-																																										
2	-	-																																									
3	-	-	-																																								
4	x	x	x	-																																							
13/14/23	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>x</td><td>-</td><td>-</td><td>x</td></tr> </table>	1	x				2	-	x			3	x	x	x		4	x	-	-	x	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>x</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>x</td><td>x</td><td>-</td></tr> </table>	1	-				2	x	-			3	-	-	-		4	-	x	x	-	3
1	x																																										
2	-	x																																									
3	x	x	x																																								
4	x	-	-	x																																							
1	-																																										
2	x	-																																									
3	-	-	-																																								
4	-	x	x	-																																							
12/13/14	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>x</td><td>-</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>x</td><td>-</td><td>-</td><td>x</td></tr> </table>	1	x				2	x	x			3	x	-	x		4	x	-	-	x	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>x</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>x</td><td>x</td><td>-</td></tr> </table>	1	-				2	-	-			3	-	x	-		4	-	x	x	-	3
1	x																																										
2	x	x																																									
3	x	-	x																																								
4	x	-	-	x																																							
1	-																																										
2	-	-																																									
3	-	x	-																																								
4	-	x	x	-																																							
14/23	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>x</td><td>-</td><td>-</td><td>x</td></tr> </table>	1	x				2	-	x			3	-	x	x		4	x	-	-	x	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>x</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>x</td><td>-</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>x</td><td>x</td><td>-</td></tr> </table>	1	-				2	x	-			3	x	-	-		4	-	x	x	-	4
1	x																																										
2	-	x																																									
3	-	x	x																																								
4	x	-	-	x																																							
1	-																																										
2	x	-																																									
3	x	-	-																																								
4	-	x	x	-																																							
12/13/4	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>x</td><td>-</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>x</td></tr> </table>	1	x				2	x	x			3	x	-	x		4	-	-	-	x	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>x</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>-</td></tr> </table>	1	-				2	-	-			3	-	x	-		4	x	x	x	-	4
1	x																																										
2	x	x																																									
3	x	-	x																																								
4	-	-	-	x																																							
1	-																																										
2	-	-																																									
3	-	x	-																																								
4	x	x	x	-																																							
12/3/4	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>-</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>x</td></tr> </table>	1	x				2	x	x			3	-	-	x		4	-	-	-	x	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>x</td><td>x</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>-</td></tr> </table>	1	-				2	-	-			3	x	x	-		4	x	x	x	-	5
1	x																																										
2	x	x																																									
3	-	-	x																																								
4	-	-	-	x																																							
1	-																																										
2	-	-																																									
3	x	x	-																																								
4	x	x	x	-																																							

- x Im Modell als bekannt vorgegebene Korrelationen
 - Implizierte Korrelationen, die sich aus den vorgegebenen
 Korrelationen errechnen lassen

Abb. 4: Schematische Darstellung einfacher Strukturtypen für eine vierdimensionale Korrelationsmatrix.

Um weiter zu verdeutlichen, wie sich die einzelnen Modelle unterscheiden, wird in Abbildungen 5 und 6 dargestellt, wie sich zwei einfache Korrelationsmatrizen verändern, wenn die unterschiedlichen Modellannahmen jeweils genau zutreffen. Die Ausgangsmatrizen sind für Abb.5 und Abb.6:

$$\begin{bmatrix} 1 & .5 & .5 & .5 \\ & 1 & .5 & .5 \\ & & 1 & .5 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 & .8 & .7 & .5 \\ & 1 & .6 & .4 \\ & & 1 & .3 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

respektive. In beiden Abbildungen sind für jede Matrix jeweils einfache Korrelationen ρ_{ij} in der linken Matrixhälfte angegeben und partielle Korrelationen $\rho_{ij.k}$ in der rechten Matrixhälfte. Es gilt wie üblich $\rho_{ij} = \sigma_{ij} / (\sigma_{ii}\sigma_{jj})^{1/2}$ und $\rho_{ij.k} = \sigma^{ij} / (\sigma^{ii}\sigma^{jj})^{1/2}$.

Eine weitere Übersicht für die bei vier Variablen möglichen Modellarten wird in Tabelle 2 gegeben. Die jeweiligen Unabhängigkeitsinterpretationen sind für die einzelnen Modelle kurz zusammengefaßt:

- a) Modell 123/124: Bedingte Unabhängigkeit des Variablenpaares (3,4) gegeben die gemeinsame Variable 12.
- b₁) Modell 123/14: Gegeben Variable 1 ist Variable 4 unabhängig von 2 und 3 zusammen.
- c₁) Modell 123/4: Völlige Unabhängigkeit der Variable 4 von den Variablen 1,2,3 zusammen.
- c₂) Modell 13/14/23: Gegeben Variable 1 ist Variable 4 unabhängig von 2 und 3 zusammen; gegeben Variable 3 ist Variable 2 unabhängig von 1.
- c₃) Modell 12/13/14: Gegeben Variable 1 sind die Variablen 2,3 und 4 voneinander unabhängig.
- d₁) Modell 14/23: Die Variablen 1 und 4 zusammen sind völlig unabhängig von den Variablen 2 und 3 zusammen.
- d₂) Modell 12/13/4 : Die Variable 4 ist völlig unabhängig von 1,2,3 zusammen; 2 und 3 sind unabhängig gegeben Variable 1.
- e) Modell 12/3/4: Die Variablen 3, 4 zusammen sind von 1,2 zusammen völlig unabhängig.

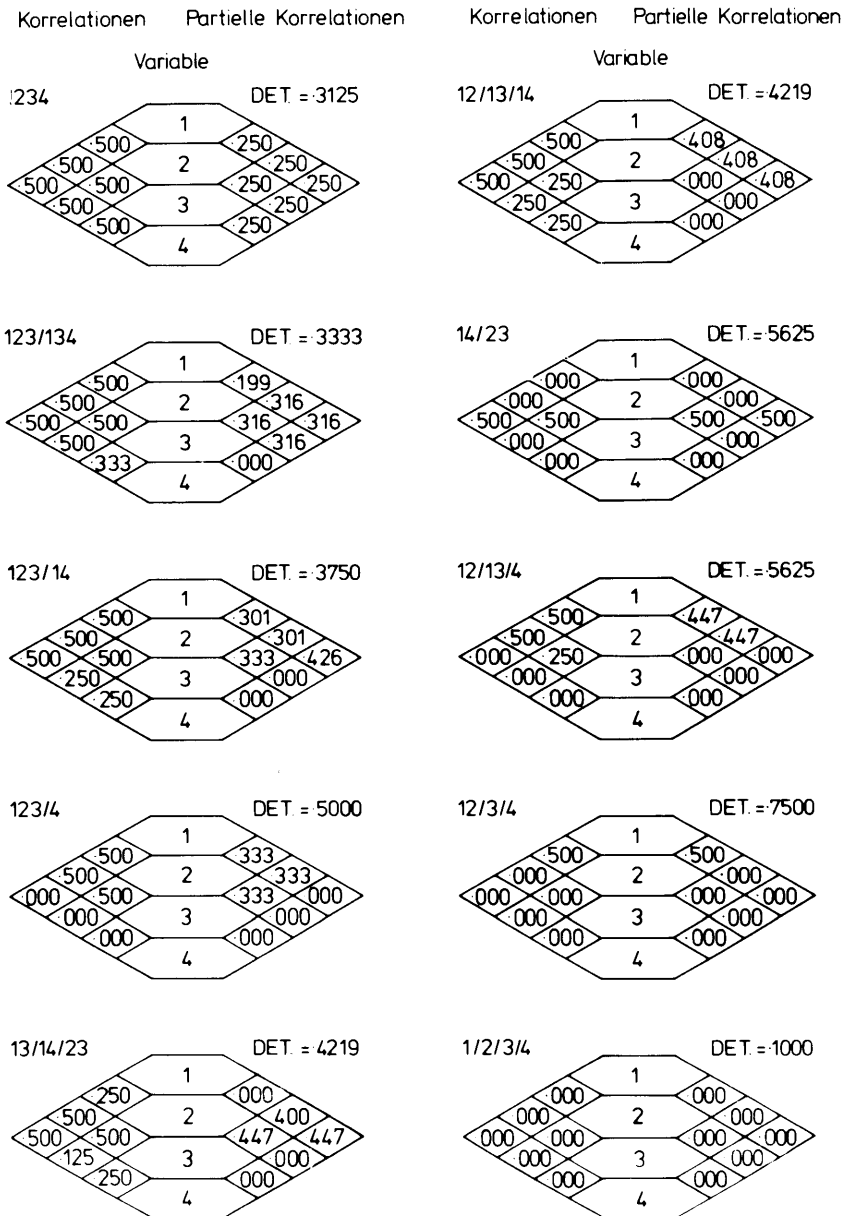


Abb. 5: Erstes hypothetisches Beispiel für einfache Strukturtypen in einer vierdimensionalen Korrelationsmatrix (links: Modellbezeichnung, rechts: die Determinante)

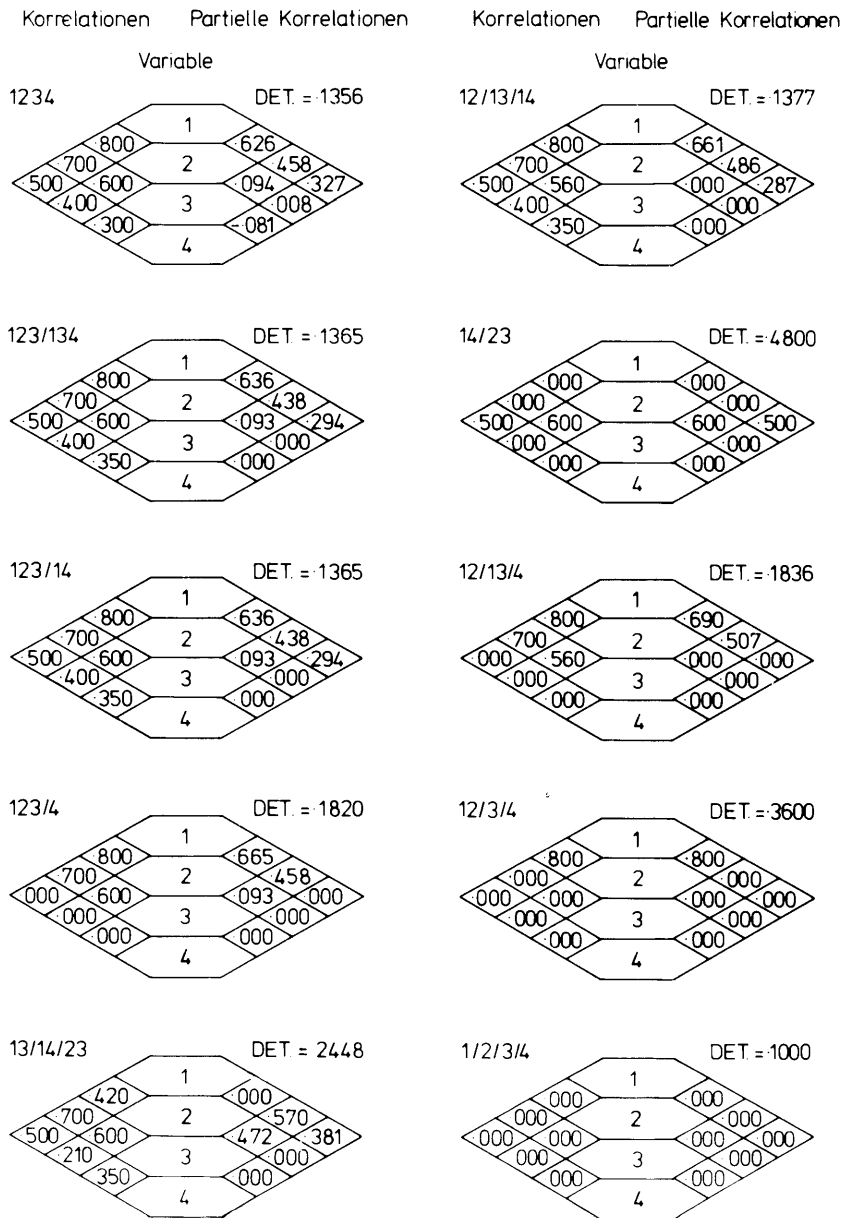


Abb. 6: Zweites hypothetisches Beispiel für einfache Strukturtypen in einer vierdimensionalen Korrelationsmatrix (links: Modellbezeichnung, rechts: die Determinante)

Tabelle 2: Assoziationsmuster für vier Variable

Modellart		Beispiele			
Fall	Zahl d. mögl. Muster	bedingt unabhängige Variablenpaare	Bezeichnung der Muster	Likelihood-Funktion ausgerechnet mit dem M-L-Schätzer	implizierte marginale Assoziationen in einer Korrelationsmatrix
a	6	(3,4)	123/124	$T_{123} + T_{124} - T_{12}$	$\rho_{34} = \frac{(\rho_{13}\rho_{14} + \rho_{23}\rho_{24}) - \rho_{12}(\rho_{13}\rho_{24} + \rho_{14}\rho_{23})}{1 - \rho_{12}^2}$
b ₁	12	(3,4) (2,4)	123/14	$T_{123} + T_{14} - T_1$	$\rho_{34} = (\rho_{13}\rho_{14} + \rho_{24} = \rho_{12}\rho_{14})$
b ₂	3	(3,4) (1,2)	13/14/23/24	iteratives Rechenverfahren nötig	
c ₁	4	(3,4) (2,4) (1,4)	123/4	$T_{123} + T_4 - T_0$	$\rho_{34} = \rho_{24} = \rho_{14} = 0$
c ₂	12	(3,4) (2,4) (1,2)	13/14/23	$T_{13} + T_{14} + T_{23} - (T_1 + T_3)$	$\rho_{34} = \rho_{13}\rho_{14} ; \rho_{24} = \rho_{13}\rho_{14}\rho_{23} ; \rho_{12} = \rho_{13}\rho_{23}$
c ₃	4	(3,4) (2,4) (2,3)	12/13/14	$T_{12} + T_{13} + T_{14} - 2T_1$	$\rho_{34} = \rho_{13}\rho_{14} ; \rho_{24} = \rho_{12}\rho_{14} ; \rho_{23} = \rho_{12}\rho_{13}$
d ₁	3	(3,4) (2,4) (1,2) (1,3)	14/23	$T_{14} + T_{23} - T_0$	$\rho_{34} = \rho_{24} = \rho_{12} = \rho_{13} = 0$
d ₂	12	(3,4) (2,4) (1,4) (2,3)	12/13/4	$T_{12} + T_{13} + T_4 - (T_1 + T_0)$	$\rho_{34} = \rho_{24} = \rho_{14} = 0 ; \rho_{23} = \rho_{12}\rho_{13}$
e	6	alle außer (1,2)	12/3/4	$T_{12} + T_3 + T_4 - 2T_0$	$\rho_{34} = \rho_{24} = \rho_{23} = \rho_{14} = \rho_{13} = 0$
f	1	alle	1/2/3/4	$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 3T_0$	$\rho_{34} = (\rho_{24} = \rho_{23} = \rho_{14} = \rho_{13} = \rho_{12} = 0)$

$T_{123} : \sum_{ijk} n_{ijk}, \ln n_{ijk}$ bzw. $\ln D_{123}$;

$T_{14} : \sum_{i1} n_{i..1} \ln n_{i..1}$ bzw. $\ln D_{14}$;

$T_1 : \sum_1 n_{i...}$ bzw. $\ln D_1$

$T_0 : n \dots \ln n \dots$ bzw. $\ln n$

f) Modell 1/2/3/4: Die vier Variablen sind völlig voneinander unabhängig.

Für Fall b_2 , das ist für Modell 13/14/23/24 läßt sich keine ähnlich einfache Interpretation ableiten, da dieses Modell nicht multiplikativ ist.

Für mehr als vier Variable ist es nützlich, eine Regel zur Hand zu haben, mit der für eine gegebene Folge von Variablenpaaren entschieden werden kann, ob sie zu einer einfachen Zusammenhangsstruktur, d.h. zu einem multiplikativen Modell führt. Zunächst wiederum ein Beispiel: Nehmen wir an, daß bei fünf Variablen für die Paare (1,2), (1,3), (2,3) und (4,5) bedingte Unabhängigkeit gefordert wird. Das resultierende Modell gehört nicht zu den multiplikativen Modellen. Ein Weg, der zu diesem Ergebnis führt, ist etwa der folgende: man eliminiert die bedingten Assoziationen der einzelnen Variablenpaare schrittweise. Diese Schritte kann man anschaulich dadurch beschreiben, daß man sich auf die Indizes der Variablen konzentriert (N. Wermuth, 1976b):

1. Schritt: die Assoziation für das Variablenpaar (1,2) wird eliminiert

$$(1,2): \quad (12345) \rightarrow \frac{(1345)(2345)}{(345)}$$

2. Schritt: die Assoziation des Paares (1,3) wird zusätzlich zu (1,2) eliminiert

$$(1,3) \text{ nach } (1,2): \quad \frac{(1345)(2345)}{(345)} \rightarrow \frac{(145)(2345)}{(45)}$$

3. Schritt: die Assoziation des Paares (2,3) wird zusätzlich eliminiert

$$\begin{matrix} (2,3) \text{ nach} \\ (1,2) \text{ und } (1,3): \end{matrix} \quad \frac{(145)(2345)}{(45)} \rightarrow \frac{(145)(245)(345)}{(45)(45)}$$

4. Schritt: die Assoziation des Paares (4,5) kann nicht auf einfache Weise eliminiert werden: Modell 14/15/24/25/34/35 ist kein multiplikatives Modell.

Wir hielten uns an die folgende Regel, um bei jedem Schritt die neue Indexkombinationen zu finden.

Von den Indexkombinationen des Zählers des vorhergehenden Schrittes wähle man diejenige aus, die das Variablenpaar enthält, dessen Assoziation eliminiert werden soll. Diese Kombination wird durch drei neue Indexkombinationen ersetzt. Die eine Kombination im Nenner enthält alle Indices außer denen des ausgewählten Variablenpaares. Die beiden Kombinationen im Zähler enthalten die gleichen Indices wie die im Nenner und zusätzlich den ersten beziehungsweise den zweiten Index des gewählten Variablenpaares. Es wird gekürzt.

Wenn ein ausgewähltes Variablenpaar in mehreren Indexkombinationen des Zählers, beziehungsweise in einer Indexkombination des Nenners vorkommt, so kann diese Regel nicht angewandt werden. Man versucht dann die Assoziation des nächsten Variablenpaares zu eliminieren. Lassen sich trotz Permutationen in der Reihenfolge der Variablenpaare nicht alle Assoziationen eliminieren, so charakterisiert die vorgegebene Folge von Variablenpaaren kein multiplikatives Modell. Zur Schätzung der Parameter sind sodann iterative Rechenverfahren erforderlich (L.A. Goodman (1979), Y.M.M. Bishop (1971), A.P. Dempster (1972), N. Wermuth (1976a)).

Die obige Regel erlaubt es, die Modellbezeichnung für jedes multiplikative Modell niederzuschreiben, sofern dieses durch eine Liste von bedingt unabhängigen Variablenpaaren gekennzeichnet ist: es sind dies die Indexkombinationen im Zähler des letzten Bruchs, die durch Schrägstriche getrennt werden (vgl. Tabelle 2, Spalten 3,4). Weiterhin erhält man nach dieser Regel die zur Berechnung von Likelihoodquotiententests erforderliche Information: Die Likelihoodfunktion läßt sich genauso faktorisieren, wie es die Indexkombinationen in Zähler und Nenner angeben (vgl. Tabelle 2, Spalte 5). Die letzte Spalte der Tabelle 2 zeigt, welche Restriktionen ein gegebenes Modell den Korrelationskoeffizienten auferlegt. Analoges gilt für die Phi-Koeffizienten (M.G. Kendall und A. Stuart, 1961) in einer 2^4 -Kontingenztafel.

Nachdem bisher die Ähnlichkeiten zwischen Zusammenhangsstrukturen in Kontingenztafeln und Korrelationsmatrizen hervorgehoben wurden, ist es nunmehr an der Zeit, auf einen wichtigen Unterschied hinzuweisen. In einer Korrelationsmatrix normalverteilter Größen gilt, daß partielle Assoziationen für alle Werte der Variablen unverändert sind. In einer Kontingenztafel sind dagegen verschiedene partielle Assoziationen für bestimmte Ausprägungen der weiteren Variablen zulässig. Das bedeutet, daß man für Daten, die zu einer Korrelationsmatrix reduziert worden sind, nicht mehr feststellen kann, ob sich partielle Assoziationen für bestimmte Werte weiterer Variabler verändern. Für Kontingenztafeln dagegen gibt es jedoch statistische Tests (z.B. Y.M.M. Bishop, 1971), N. Wermuth, B.K. Yun, H. Gönner, 1976), anhand derer überprüft werden kann, ob partielle Assoziationen (in allen Teiltafeln) gleich sind oder nicht.

Eine Folge dieses Unterschiedes ist es, daß in Kontingenztafeln eine bestimmte Konstellation von marginalen Assoziationen manchmal so aussieht, als sei sie das Ergebnis eines einfachen Assoziationsmusters, während sie in Wirklichkeit aus sich ändernden partiellen Assoziationen folgt. N. Victor (1972) nannte den letzteren Fall eine Assoziationsüberdeckung. In Korrelationsmatrizen sind - gemäß Annahme - keine Assoziationsüberdeckungen möglich; ein bestimmtes Assoziationsmuster impliziert bei multivariat-normalverteilten Variablen eindeutig bestimmte marginale Korrelationen und umgekehrt.

2.4 Rechenverfahren und Computerprogramme

Für die im nächsten Kapitel beschriebenen Anwendungen der Theorie der Kovarianz-Selektion und der Theorie der logarithmisch-linearen Modelle wurden sowohl vorhandene Rechenverfahren und Computerprogramme verwendet, als auch neue Rechenverfahren entwickelt und spezielle Computerprogramme

erstellt. Alle Programme wurden (in Fortran IV) für die Rechenanlage CD 3300 der Universität Mainz entweder adaptiert oder neu geschrieben.

Zum Anpassen eines vorgegebenen logarithmisch-linearen Modells an eine Kontingenztafel wurde das ECTA-(Everybody's Contingency Table Analysis) Program von L. Goodman, University of Chicago, benutzt. Der dabei verwendete zyklische Anpassungsalgorithmus wurde von Y.M.M. Bishop (1967) aus einem Rechenverfahren von W.E. Deming und F.F. Stephan (1940) entwickelt, von S. Fienberg (1970) diskutiert und von S. Haberman (1974) als Fortran-Programm veröffentlicht. Zum Anpassen eines vorgegebenen Kovarianzselektionsmodells wurde eine abgeänderte Version des zyklischen Anpassungsalgorithmus von A.P. Dempster (1972) entwickelt und neu programmiert (N. Wermuth und E. Scheidt, 1977). Programme zur Verarbeitung der Rohdaten wurden freundlicherweise von E. Scheidt, Universität Mainz, zur Verfügung gestellt, insbesondere ein Auszählprogramm zum Erstellen von Kontingenztafeln, sowie Programme zum Berechnen und Ausdrucken von Korrelationsmatrizen. Ein weiterführendes Programm zum Erstellen, Verändern und Zusammenfassen von Kontingenztafeln ist fast ausgetestet (N. Wermuth, T. Wehner, H. Gönner, G. Schneidewind, 1977). Die umfangreichen Programme für die datengesteuerte Suche (N. Wermuth, 1976b) nach einfachen Zusammenhangsstrukturen sowohl in Korrelationsmatrizen als auch in Kontingenztafeln wurden neu geschrieben (N. Wermuth, T. Wehner, H. Gönner, 1976). Außerdem wurde ein Programm speziell zur Prüfung der Auswirkungen von Hintergrund-Faktoren erstellt (N. Wermuth, B.K. Yun, H. Gönner, 1976). Angaben darüber, wieviel Rechenzeit für verschiedene Beispiele auf der Rechenanlage CD 3300 benötigt wurde, befinden sich in diesen Arbeiten. Für unsere Berechnungen wurden außerdem Unterprogramme von M. Budenz, und O. Schwentker, Universität Mainz, sowie ein Faktorenanalysenprogramm von V. Hodapp, Universität Mainz, zur Verfügung gestellt.

3. ANWENDUNGEN IN DER MEDIZIN

An Beispielen aus dem Bereich der Medizin und der Psychologie soll im folgenden gezeigt werden, wie die Theorie der logarithmisch-linearen Modelle und die Theorie der Kovarianzauswahl zur Zusammenhangsanalyse verwendet werden können. Eine wichtige Einzelfrage bei komplexen wechselseitigen Beziehungen ist die, ob Stör- oder Hintergrund-Faktoren einen hauptsächlich untersuchten Zusammenhang wesentlich beeinflussen oder verändern. Wegen der Wichtigkeit dieser Frage wird sie in einem eigenen Kapitel (Kap. 3.1) behandelt.

Ein Urteil darüber, wie gewichtig einzelne Faktoren in einer mehrdimensionalen Struktur sind, ist möglich, wenn man weiß, welche einfachen Zusammenhangsstrukturen eine gegebene Datenmenge gut beschreiben. Eine Entscheidung welche Zusammenhangsstrukturen gut mit den Beobachtungen zu vereinbaren sind, ist im Rahmen von datengesteuerten (Kap. 3.2) oder von hypothesegesteuerten (Kap. 3.3) Analysen möglich. Datengesteuerte Analysen werden hauptsächlich eingesetzt, um einen ersten Überblick zu gewinnen, um zu erfahren, wie viele und welche Variable bei einer bestimmten Gesamtzahl von Beobachtungen gleichzeitig betrachtet werden können. Sie sind ebenfalls sinnvoll, wenn nur Häufigkeiten oder Korrelationen zu schätzen sind, die inhaltliche Interpretation einer Zusammenhangsstruktur aber weniger interessiert. Bei hypothesengesteuerten Analysen müssen bereits Kenntnisse über die möglichen Interrelationen vorliegen - sei es aus inhaltlichen Überlegungen, sei es aus datengesteuerten Analysen in Vorstudien -, so daß gezielte Fragen hinsichtlich einer Struktur formuliert und geprüft werden können.

Bei allen Analysen nehmen wir an, daß die vorliegenden Daten Stichproben von multinomialverteilten oder normalverteilten Variablen darstellen, Ferner wird unterstellt,

daß alle wesentlichen Variablen bekannt sind und in die Untersuchung einbezogen wurden und daß sie darüberhinaus genau beobachtet bzw. gemessen werden konnten. Wir überprüfen jeweils, ob die verteilungstheoretischen Annahmen zumindest annähernd erfüllt sein können.

Die Voraussetzung, daß alle untersuchten Variablen normalverteilt sind, ist wesentlich restriktiver als die, daß sie einer Multinomialverteilung folgen. Bei normalverteilten Variablen messen Korrelationskoeffizienten (einfache und partielle) die Assoziationen aller Variablen. Unterschiedliche Assoziationen für bestimmte Wertebereiche einer Variablen kommen - gemäß Annahme - dabei nicht vor. Infolgedessen kann, sobald Daten bereits in Form einer Korrelationsmatrix vorliegen, weder festgestellt noch überprüft werden, ob es nicht doch sich verändernde partielle Assoziationen gibt.

Bei multinomial-verteilten Variablen hingegen, sind unterschiedliche partielle Assoziationen zulässig, das heißt, daß die Assoziation eines Variablenpaares sich ändern kann, je nachdem welches Teilkollektiv der übrigen Variablen man betrachtet. Ob Assoziationen in Teilkollektiven gleich sind (vgl. Kap. 2.2), ist überprüfbar. Das bedeutet einerseits, daß in einer Kontingenztafel situationsspezifischere Information enthalten sein kann, als in einer Korrelationsmatrix, es bedeutet aber andererseits, daß ähnliche Fragestellungen mit Daten in Kontingenztafeln oft nur mit aufwendigeren Verfahren beantwortet werden können als mit Daten in einer Korrelationsmatrix. Diese Behauptung wird im folgenden Abschnitt konkretisiert.

3.1 Erkennen und Ausschalten der Wirkung von Hintergrund-Faktoren

Bei empirischen Untersuchungen sollten stets die Auswirkungen von Hintergrund-Faktoren bedacht werden. Dies ist nötig, um Fehlinterpretationen zu vermeiden. Es kann zum Beispiel der Zusammenhang von zwei Variablen oder Merkmalen verfälscht wiedergegeben werden, wenn der Einfluß eines dritten Merkmals nicht erkannt wird. Bei medizinischen Studien werden mögliche Hintergrund-Faktoren wie Alter, Geschlecht, Krankheiten in der Anamnese eines Patienten häufig routinemäßig miterfaßt. Wie stark jedoch solche Merkmale einen untersuchten Zusammenhang beeinflussen oder gar verändern, ist in jedem einzelnen Fall zu prüfen. Besonders wichtig ist eine Überprüfung im allgemeinen, wenn die Vergleichbarkeit verschiedener Kollektive nicht mit Hilfe von geplanten Experimenten sichergestellt werden kann, und im besonderen, wenn das ursächliche Wirken einer Variablen erforscht werden soll (W.G. Cochran, 1965; Koller, 1964), also die Auswirkungen von Hintergrund-Faktoren mit denen des vermuteten ursächlichen Faktors verwechselt werden könnten.

Bei qualitativen oder klassifizierten quantitativen Merkmalen kann die Frage nach der Wirkung eines Hintergrund-Faktors wie folgt gestellt werden: Genügt es, einen Zusammenhang so darzustellen, wie er sich im Gesamtkollektiv vorliegender Beobachtungen widerspiegelt oder muß die Aussage über die Art des Zusammenhangs modifiziert werden, weil in Teilkollektiven, die durch den Hintergrund-Faktor festgelegt sind, andere Abhängigkeiten bestehen als im Gesamtkollektiv? Bei multivariat-normalverteilten Variablen vereinfacht sich diese Frage zu: Stimmt eine einfache Korrelation annähernd mit der zugehörigen partiellen Korrelation (gegeben alle restlichen Variable) überein?

3.1.1. Methodik

Wir nehmen für qualitative wie auch für quantitative Variable an, daß insgesamt n Beobachtungen für zwei hauptsächlich untersuchte Merkmale (Variable 1 und 2) und für einen Hintergrund-Faktor (Variable 3) vorliegen. Dabei kann der Hintergrund-Faktor entweder ein einzelnes Merkmal oder eine Kombination aus mehreren Einzelmerkmalen sein. Ein wesentlicher Einfluß des Hintergrund-Faktors liegt vor, wenn entweder in Teilkollektiven des Hintergrund-Faktors verschiedene Assoziationen vorliegen, oder wenn nur die marginale und die partielle Assoziation sich wesentlich voneinander unterscheiden. Die Prüfung, ob die Assoziation in allen Teilkollektiven des Hintergrund Faktors gleichartig ist, ist - nur bei qualitativen oder klassifizierten quantitativen Variablen - anhand der Prüfgröße χ^2 [12/13/23] für Modell 12/13/23 möglich. Pearsons Chi-Quadrat-Wert und die Likelihood-Quotienten-Prüfgröße für die marginale Unabhängigkeit der Variablen 1 und 2 bezeichnen wir mit χ^2 und $\chi^2_{1/2}$, respektive; diejenige für die partielle Assoziation dieser Variablen bezeichnen wir mit $\chi^2_{\text{part. 12}}$. Die Prüfgröße schließlich für die bedingte Unabhängigkeit der Variablen 1 und 2 bzw. für Modell 13/23 sei mit χ^2 [13/23] bezeichnet.

In einer Kontingenztafel wird Modell 12/13/23 bzw. die Hypothese $H_{01}: u_{123}(ijk) = 0 \quad \forall ijk$ mit der Teststatistik

$$(16) \quad \chi^2 [12/13/23] = -2 \ln \prod_{ijk} \left[\frac{\hat{m}_{ijk}}{n_{ijk}} \right]^{n_{ijk}}$$

überprüft, die für große n annähernd Chi-Quadrat-verteilt mit $(I-1)(J-1)(K-1)$ Freiheitsgraden ist. Die Notation wurde von Kap. 2.2 übernommen, n_{ijk} ist die beobachtete, \hat{m}_{ijk} ist die für Modell 12/13/23 geschätzte Fallzahl für die Ausprägungskombination i, j, k der drei Variablen,

die insgesamt je I,J,K Ausprägungen besitzen. Die Maximum-Likelihood-Schätzer \hat{m}_{ijk} sind durch Bedingung (11) Kap. 2.2 eindeutig definiert (M.W. Birch 1963, S.N. Roy und M.A. Kastenbaum 1956) und werden mittels eines iterativen Rechenverfahrens (Y.M.M. Bishop, 1969) ermittelt.

Wird H_{01} abgelehnt, so bestehen ungleichartige Abhängigkeiten in den Teilkollektiven und unsere Ausgangsfrage ist beantwortet: es liegt ein wesentlicher Einfluß des Hintergrund-Faktors vor. In diesem Fall wäre es irreführend, nur den Zusammenhang im Gesamtkollektiv zu präsentieren und zu interpretieren. Stattdessen muß die Art des Zusammenhangs für die Variablen 1 und 2 in jedem der K Teilkollektive des Hintergrund-Faktors getrennt beschrieben werden.

Wird dagegen H_{01} nicht abgelehnt, so sind zur Beurteilung des Hintergrund-Faktors zwei weitere Hypothesen zu prüfen, diejenigen, daß die partielle (H_{02}) und daß die marginale (H_{03}) Abhängigkeit der Variablen 1 und 2 fehlen. Stimmen die Testergebnisse für H_{02} und H_{03} überein, derart, daß entweder beide ein signifikantes oder beide ein nicht-signifikantes Resultat ergeben, so kann man folgern, daß der Einfluß des Hintergrund-Faktors auf den Zusammenhang zwischen Variable 1 und 2 unerheblich ist. Es genügt in diesem Fall, den Zusammenhang im Gesamtkollektiv darzustellen. Wird dagegen H_{03} abgelehnt, ohne daß H_{02} verworfen werden kann, so bedeutet dies, daß im Gesamtkollektiv ein Zusammenhang durch den Hintergrund-Faktor nur vorgetäuscht wird, daß die beiden Variablen aber tatsächlich in den Teilkollektiven voneinander unabhängig sind. (Die Möglichkeit, daß H_{03} nicht abgelehnt werden kann, wenn H_{02} abgelehnt wird, ist zwar theoretisch nicht auszuschließen, aber praktisch fast nie zu erwarten).

Zu prüfen ist $H_{02}: u_{12}(ij) = 0 \quad \forall ij$, unter der Voraussetzung $u_{123}(ijk) = 0 \quad \forall ijk$, mit der Teststatistik

$$(17) \quad \chi^2 [\text{part. 12}] = -2 \ln \prod_{i,j,k} \left[\frac{\hat{m}_{ijk}}{\hat{m}_{ijk}} \right]^{n_{ijk}},$$

die annähernd einer Chi-Quadrat-Verteilung mit $(I-1)(J-1)$ Freiheitsgraden folgt. Dabei ist \hat{m}_{ijk} wie zuvor definiert und \hat{m}_{ijk} ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für dasjenige Modell, in dem die bedingte Unabhängigkeit der Variablen 1 und 2 postuliert wird (Modell 13/23):

$$(18) \quad \hat{m}_{ijk} = \frac{n_{i.k} n_{.jk}}{n_{..k}}.$$

Eine einfachere Berechnung von (17) ist möglich, wenn man berücksichtigt, daß für Likelihoodquotientenprüfgrößen die folgende Additivitätseigenschaft gilt:

$$(19) \quad \chi^2 [\text{part. 12}] = \chi^2 [13/23] - \chi^2 [12/13/23]$$

Dabei ist

$$(20) \quad \chi^2 [13/23] = -2 \ln \prod_{ijk} \left[\frac{\hat{m}_{ijk}}{n_{ijk}} \right]^{n_{ijk}}$$

die Prüfgröße für Modell 13/23, bzw. für $H: u_{12}(ij) = u_{123}(ijk) = 0 \quad \forall ijk$ (Birch 1963).

Marginale Unabhängigkeit liegt vor, wenn die beiden Variablen im Gesamtkollektiv unabhängig sind, wenn also die Hypothese

$H_{03}: m_{ij.} = \frac{m_{i..} m_{.j.}}{m_{...}}$ gilt, die bei $(I-1)(J-1)$ FG geprüft wird,

$$\text{mit } \chi^2 [1/2] = -2 \ln \prod_{ij} \left[\frac{n_{i..} n_{.j.} / n_{...}}{n_{ij.}} \right]^{n_{ij.}} \quad \text{oder mit}$$

(21)

$$\chi^2 = \sum (n_{...} n_{ij.} - n_{i..} n_{.j.})^2 / n_{...} n_{i..} n_{.j.}.$$

In einer Korrelationsmatrix für normalverteilte Variable ist Homogenität der Assoziation eine Annahme. Das bedeutet, daß zur Prüfung der bedingten Unabhängigkeit nichts weiter getestet wird als die Hypothese, daß ein partieller Korrelationskoeffizient von Null verschieden ist.

Für den Likelihoodquotiententest berechnet man

$$(22) \quad \chi^2 [13/23] = -n [\ln D_{123} - (\ln D_{13} + \ln D_{23} - \ln D_3)].$$

Es ist bekannt, daß diese Statistik für große Beobachtungszahlen, n , annähernd einer Chi-Quadrat-Verteilung mit einem Freiheitsgrad folgt. D_{123} , D_{13} , D_3 bezeichnen dabei die Determinanten der beobachteten Korrelationsmatrizen mit den Variablen (1,2,3), (1,3), beziehungsweise (3). (16) folgt, wie leicht zu erkennen ist, aus (3) sowie aus einer Berechnungsformel für die Determinante einer Korrelationsmatrix (vgl. N. Wermuth, 1976a):

$$(23) \quad D_{123} = \frac{D_{13} D_{23}}{D_3} (1 - r^2_{12.3}).$$

3.1.2. Anwendungsbeispiele

Die vier folgenden Kontingenztafelanalysen basieren auf Daten* aus der von der Deutschen Forschungsgemeinschaft 1964 initiierten Studie "Schwangerschaftsverlauf und Kindesentwicklung" (vgl. S. Koller, 1974). Bei den ersten beiden Beispielen wird gefragt, ob die heterogene Zusammensetzung des Datenmaterials aus zahlreichen Kliniken den beobachteten Zusammenhang zweier Variabler im Gesamtkollektiv bereits erklärt. Bei den beiden anderen Beispielen wird untersucht, ob eine Aussage über den Zusammenhang zweier Variabler einheitlich für alle Schwangeren gemacht werden kann, oder ob zusätzliche Informationen über die Anamnese der Schwangeren heranzuziehen sind. Zum einen ist es also der Hintergrund-Faktor Klinik, zum anderen der aus mehreren Einzelmerkmalen zusammengesetzte Hinter-

*Die Originaldaten sind im Anhang wiedergegeben.

grund-Faktor Anamnese, dessen Einfluß geprüft wird. Weitere inhaltlich relevante Beispiele sind in N. Wermuth, B.K. Yun und H. Gönner (1976) beschrieben.

3.1.2.1 Kliniksheterogenitäten

An der Studie "Schwangerschaftsverlauf und Kindesentwicklung" arbeiten zahlreiche Frauenkliniken Deutschlands mit. Es ist dabei die Regel, daß ein bestimmtes Merkmal, eine bestimmte Variable unterschiedlich oft in den einzelnen Kliniken beobachtet wird. Solche Unterschiede entstehen zum Beispiel, wenn die Kliniken unterschiedliche Forschungsschwerpunkte und Spezialkliniken besitzen oder demographisch anders geartete Einzugsgebiete haben und infolgedessen unterschiedliche Patientengruppen behandeln. Wird nun im Gesamtkollektiv der Patienten aus allen Kliniken ein Zusammenhang zweier Merkmale beobachtet, so ist es denkbar, daß dieser Zusammenhang nur durch Kliniksheterogenitäten vorgetäuscht wird, das heißt, nur dadurch, daß jedes Merkmal verschieden häufig in den einzelnen Kliniken vorkommt, und zwar aus Gründen, die in den Besonderheiten der einzelnen Kliniken zu suchen sind, nicht aber in einer echten Abhängigkeit der untersuchten Variablen. Dies ist jeweils zu prüfen.

a) Glukosurie der Mutter und Neugeborene mit Auffälligkeiten

Bei 3.412 Geburten wurde ein inhaltlich kaum erklärbarer Zusammenhang zwischen Glukosurie (Zucker im Urin) der Mutter während der Schwangerschaft und der Zahl der Neugeborenen mit Auffälligkeiten beobachtet (Abb. 7). Als Auffälligkeiten zählen dabei sowohl Naevi oder Haemangiome als auch schwere Mißbildungen. Der nur scheinbare Zusammenhang mit Glukosurie ist dadurch erklärbar, daß zufällig in einigen Kliniken häufiger als in anderen sowohl Glukosurie als auch Auffälligkeiten festgestellt wurden,

daß es aber in jeder einzelnen Klinik keinen Zusammenhang gibt. Diese Tatsache spiegelt sich in den Prüfergebnissen wider. Glukosurie und Auffälligkeiten sind in allen Kliniken gleichartig miteinander verbunden: $\chi^2 [12/13/23]$ ist nicht größer als das 95%-Quantil der zugehörigen Chi-Quadrat-Verteilung mit 24 Freiheitsgraden, nicht größer als $\chi^2_{.95;24}$. Darüberhinaus hängen Glukosurie und Auffälligkeiten in jeder Klinik nur so schwach zusammen, daß sie noch als voneinander unabhängig zu beurteilen sind: $\chi^2 [part. 12]$ ist nicht größer als $\chi^2_{.95;3}$.

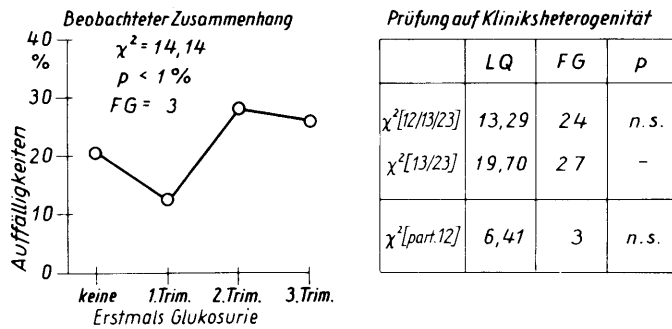


Abb. 7: Prüfergebnisse für den Zusammenhang zwischen Glukosurie der Mutter und Auffälligkeiten der Neugeborenen.

Abbildung 8 zeigt die absoluten beobachteten sowie die bei gleichartiger Assoziation erwarteten Fallzahlen für jede einzelne Klinik. Wegen der kleinen Fallzahlen je Klinik ist es - im Gegensatz zum Gesamtkollektiv - nicht mehr sinnvoll, den prozentualen Anteil der Neugeborenen mit Auffälligkeiten anzugeben. In dieser Abb. 8 wird sichtbar, wie gering die Abweichungen zwischen beobachteten und für Modell 12/13/23 erwarteten Fallzahlen tatsächlich sind, und was sich somit hinter dem rechnerischen Ergebnis des nicht-signifikanten $\chi^2 [12/13/23]$ verbirgt.

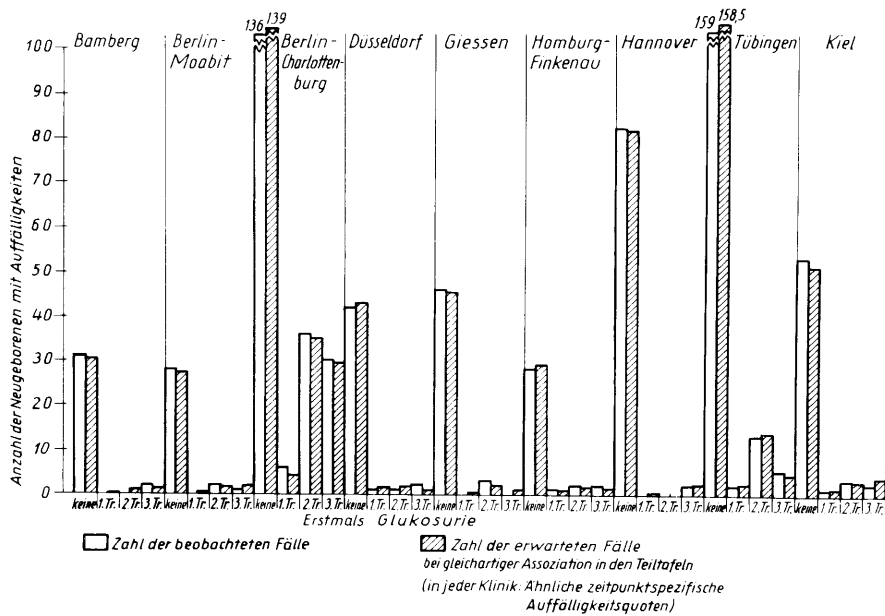


Abb. 8: Beobachtete und für Modell 12/13/23 erwartete Fallzahlen von Neugeborenen mit Auffälligkeiten (1), gegliedert nach Glukosurie der Mutter (2) und nach Kliniken (3).

Neben den erwarteten Fallzahlen bei gleichartiger Assoziation in allen Kliniken wurden im nächsten Schritt für jede einzelne Klinik diejenigen Fallzahlen berechnet, die bei Unabhängigkeit von Glukosurie und Auffälligkeiten in jeder Klinik zu erwarten sind; es wurden also die Erwartungswerte für Modell 13/23 geschätzt. $\chi^2 [13/23]$ mißt die Güte der Anpassung dieses Modells an die Daten. Wir betrachten sodann mit $\chi^2 [\text{part. 12}]$ die Unterschiede zwischen den beiden Arten von Erwartungswerten, da Modell 12/13/23 bereits im vorhergehenden Schritt den Daten angepaßt wurde. Abb. 9 zeigt diese Abweichungen.

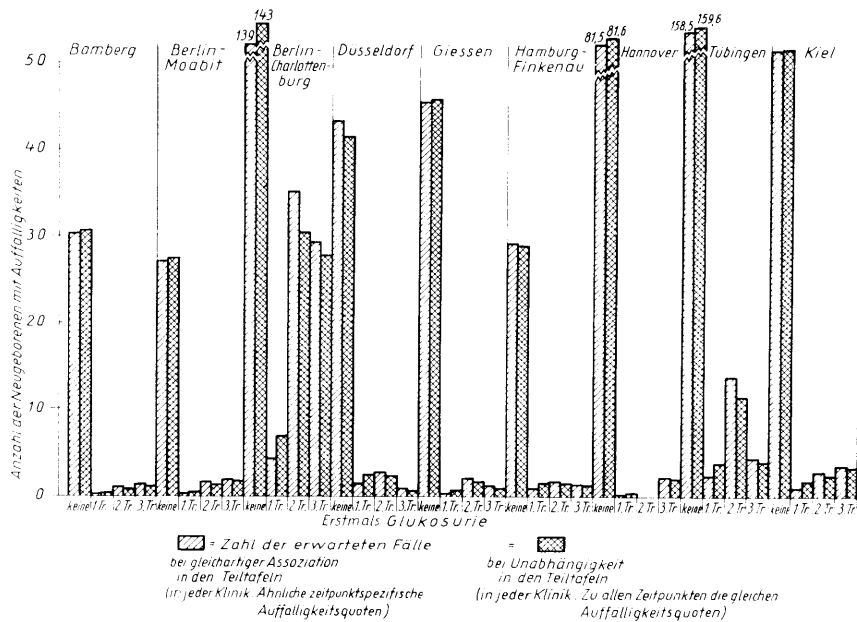


Abb. 9: Für Modell 12/13/23 und für Modell 13/23 erwartete Fallzahlen von Neugeborenen mit Auffälligkeiten (1), gegliedert nach Glukosurie der Mutter (2) und nach Kliniken (3).

Das Maß für die Abweichungen in Abbildung 9 ist χ^2 [part. 12] = χ^2 [13/23] - χ^2 [12/13/23]. Aus der Tatsache, daß χ^2 [part. 12] nicht signifikant ist, läßt sich schließen, daß der beobachtete Zusammenhang von Glukosurie und Auffälligkeiten in jeder Klinik noch als zufallsbedingt gelten kann. Erst durch den Einfluß, der durch die Eigenarten der einzelnen Kliniken zustande kommt, entsteht im Gesamtkollektiv der Anschein eines Zusammenhangs. In diesem Beispiel liegt somit ein wichtiger Einfluß des Hintergrund-Faktors Klinik vor, in dem nun folgenden Beispiel dagegen nicht.

b) Schwangerschaftsdauer und Schwangerschaftsausgang

Zwischen Schwangerschaftsdauer und Schwangerschaftsausgang besteht ein offensichtlicher, medizinisch erklärbarer Zusammenhang (Abb. 10). Eine Prüfung auf Kliniksheterogenität erfolgt in diesem Beispiel nicht aus sachlichen Erwägungen, sondern lediglich, um die Leistungsfähigkeit unseres Prüfverfahrens darzustellen. Man erwartet, daß der Zusammenhang zwischen Schwangerschaftsdauer und Schwangerschaftsausgang in allen Kliniken gleichartig, also in den einzelnen Kliniken nicht anders als im Gesamtkollektiv ist: je kürzer die Gestationszeit, desto geringer sind die Überlebenschancen des Neugeborenen.

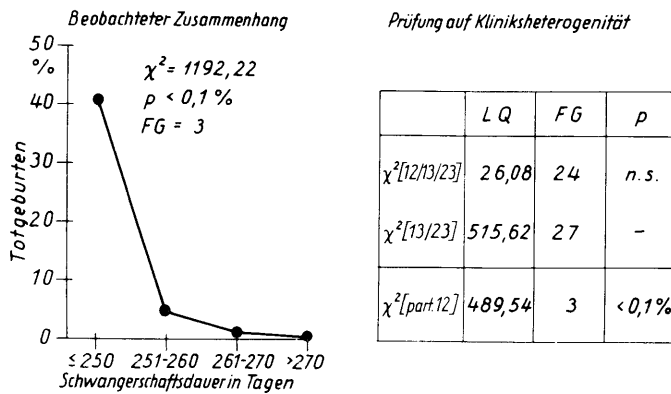


Abb. 10: Prüfergebnisse für den Zusammenhang zwischen Schwangerschaftsdauer und Schwangerschaftsausgang.

Genau diese Erwartungen werden durch die Prüfergebnisse bestätigt. Da $\chi^2 [12/13/23]$ nicht signifikant ist, nimmt man gleichartige Assoziationen in allen Kliniken an (vgl. auch Abb. 11). Weiterhin sind Schwangerschaftsdauer und Schwangerschaftsausgang in jeder Klinik deutlich assoziiert, da

χ^2 [part. 12] hochsignifikant ist. Im Gegensatz zum ersten Beispiel weichen also die Erwartungswerte für Modell 12/13/23 stark von denjenigen für Modell 12/13 ab. Diese Tatsache ist in Abb. 12 graphisch dargestellt. In diesem Beispiel ist somit der Einfluß des Hintergrund-Faktors "Klinik" als unwesentlich anzusehen.

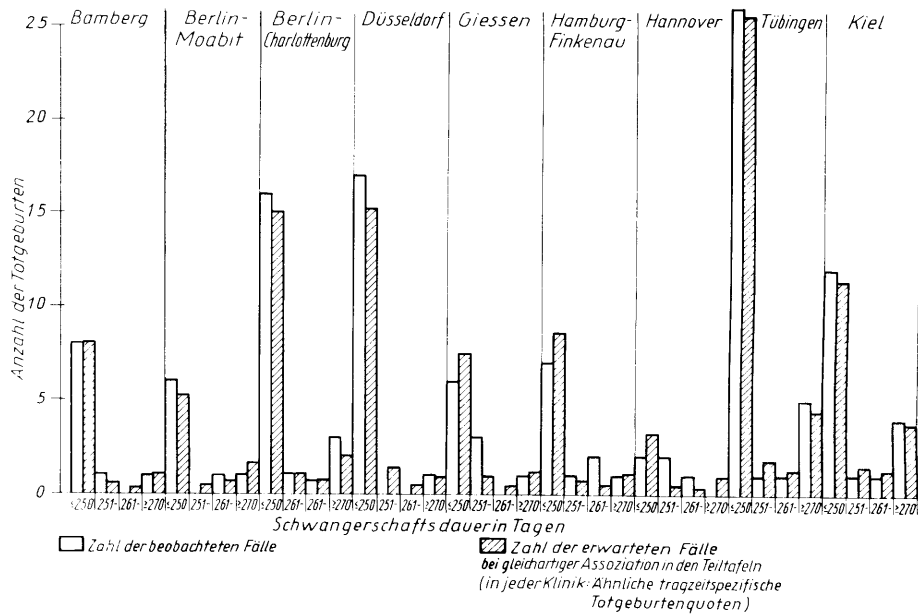


Abb. 11: Beobachtete und für Modell 12/13/23 erwartete Fallzahlen von Totgeburten (1), gegliedert nach Schwangerschaftsdauer (2) und nach Kliniken (3).

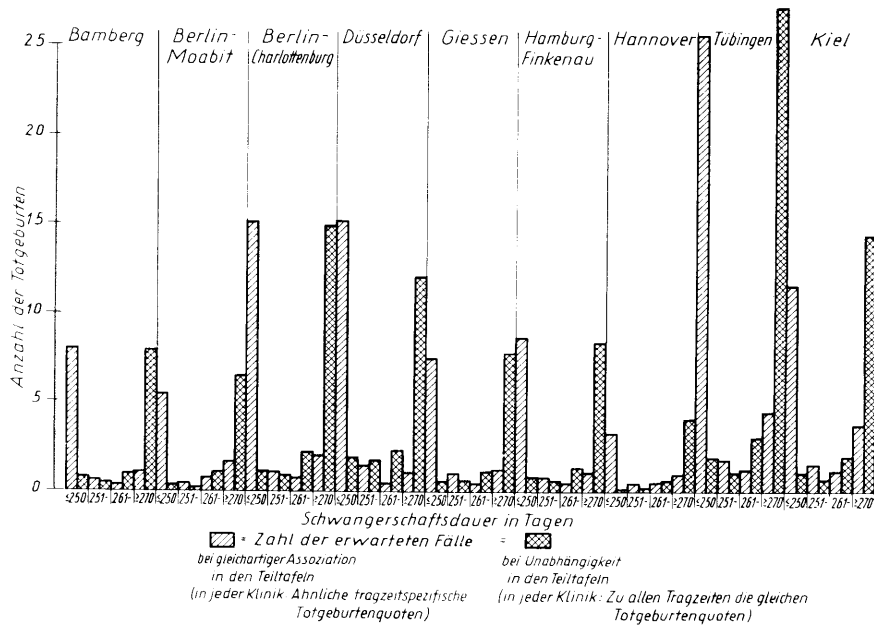


Abb. 12: Für Modell 12/13/23 und für Modell 13/23 erwartete Fallzahlen von Totgeburten (1), gegliedert nach Schwangerschaftsausgang (2) und nach Kliniken (3).

3.1.2.2 Anamnese Faktoren

Im Rahmen der Studie "Schwangerschaftsverlauf und Kindesentwicklung" werden Ursachen und Wirkungen psychosomatischer Beschwerden gesondert untersucht (P. Netter, 1975; P. Netter, N. Wermuth, 1975). Psychosomatische Beschwerden sind deutlich von verschiedenen Anamnese Faktoren abhängig. So zeigten sich zum Beispiel in einem Kollektiv von etwa 6.000 Schwangeren die Zahl der früheren Fehlgeburten, die Anzahl der lebenden Kinder, die Ehedauer als relevante Faktoren für die Beschwerden. Bei der Zusammenhangsanalyse von Beschwerden mit weiteren Variablen, die ihrerseits ebenfalls von den gleichen Anamnese Faktoren beeinflusst werden, ist infolgedessen

jeweils zu prüfen, wie sich diese Anamnese faktoren auf die untersuchte Assoziation auswirken. Dazu zwei Beispiele. Im ersten Beispiel ist der Einfluß des Hintergrundfaktors so geartet, daß man einzelne Teilkollektive getrennt betrachten muß, im zweiten Beispiel ist der Einfluß des gleichen Hintergrundfaktors unerheblich.

a) Psychosomatische Beschwerden und Kinderwunsch

Im Gesamtkollektiv der befragten Schwangeren wurde von Frauen mit psychosomatischen Beschwerden öfter angegeben, daß die Schwangerschaft erwünscht war, als von Frauen, die nicht über Beschwerden klagten (Abb. 13).

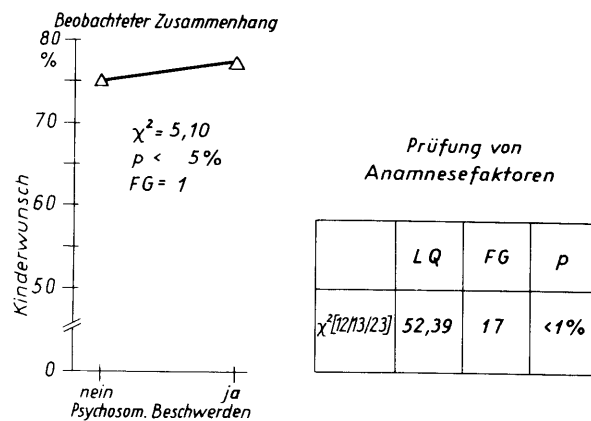


Abb. 13: Prüfergebnisse für den Zusammenhang zwischen psychosomatischen Beschwerden und Kinderwunsch.

Die Prüfergebnisse für die Wirkung von Anamnese faktoren auf diesen Zusammenhang zeigen, daß die obige Aussage nicht so global aufrechterhalten werden kann; vielmehr muß man sie nach Untergruppen von Schwangeren modifizieren. Dies ist daran zu sehen, daß $\chi^2 [12/13/23]$ die zugehörige

einprozentige Signifikanzschwelle überschreitet. Wie sich der Zusammenhang jeweils in den Untergruppen oder Teilkollektiven darstellt, muß aus den Daten abgelesen werden.

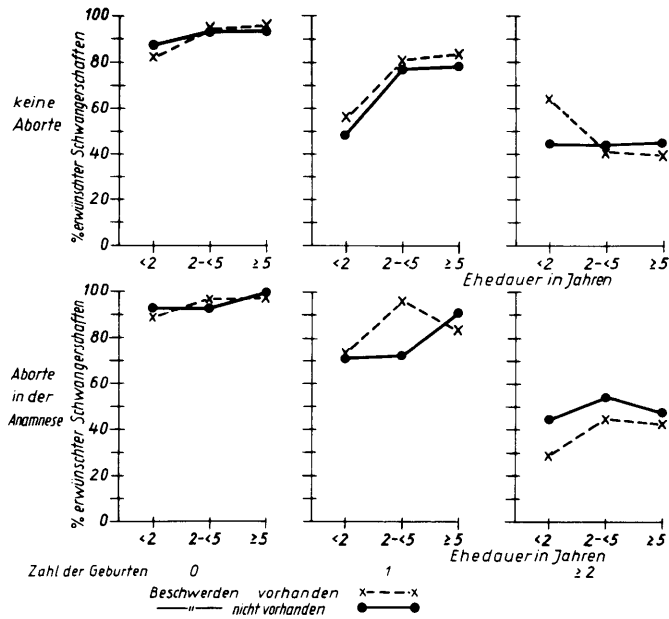


Abb. 14: Beobachtete Prozentzahlen von erwünschter Schwangerschaft (1), gegliedert nach psychosomatischen Beschwerden (2) und nach verschiedenen Anamnese-faktoren (3).

Drei einzelne Anamnese-faktoren wurden im vorliegenden Fall als eine gemeinsame Variable mit 18 Klassen definiert. Diese Klassen ergeben sich aus den möglichen Kombinationen der drei Variablen mit folgenden Klassifikationen: frühere Fehlgeburten (ja; nein), Zahl der früheren Kinder (0; 1; ≥ 2) und Ehedauer in Jahren (< 2; 2 bis 4; > 4). Aus Abbildung 14 ist zu ersehen, daß bei allen Frauen, die ihr erstes Kind

erwarten, psychosomatische Beschwerden und Kinderwunsch nicht miteinander korrelieren. Dies gilt unabhängig davon, ob die Schwangeren frühere Fehlgeburten hatten. Ebenso spielt die Ehedauer in diesem Zusammenhang keine wichtige Rolle (Abb. 14 links). Dagegen sind Beschwerden und Kinderwunsch deutlich gegenläufig assoziiert bei Frauen mit früheren Fehlgeburten und wenigstens einem lebenden Kind. Insbesondere bei einer Ehedauer von 2-4 Jahren und nur einem lebenden Kind war für Frauen mit Beschwerden gegenüber jenen ohne Beschwerden der Kinderwunsch stark erhöht (Abb. 14 Mitte unten). Dagegen ist bei mehreren lebenden Kindern und früheren Aborten der Kinderwunsch geringer bei Frauen mit Beschwerden als bei Frauen ohne psychosomatische Beschwerden (Abb. 14 rechts unten). Die Prüfergebnisse und die zugehörige Interpretation der Daten zeigen, daß sich die Anamnesefaktoren unterschiedlich auswirken und daß ihre Wirkung infolgedessen in die Analyse einbezogen werden muß. Das nächste Beispiel zeigt, daß bei einem anderen Zusammenhang der Hintergrundfaktor "Anamnesefaktoren" nicht berücksichtigt werden muß.

b) Psychosomatische Beschwerden und früher praktizierte Konzeptionsverhütung

Die zwischen 1963 und 1970 untersuchten Schwangeren mit psychosomatischen Beschwerden verwendeten vor ihrer Schwangerschaft eher Konzeptionsverhütungsmittel als jene Frauen, die nicht über solche Beschwerden klagten (Abb. 15). Diese Beobachtung bestätigt sich in den verschiedenen (wie zuvor in Beispiel (a) definierten) Untergruppen der Schwangeren; $\chi^2 [12/13/23]$ ist nicht signifikant, aber $\chi^2 [part. 12]$ ist signifikant. Mit anderen Worten: es läßt sich kein wesentlicher Einfluß der betrachteten Anamnesefaktoren auf den Zusammenhang zwischen Beschwerden und früherer Konzeptionsverhütung nachweisen. Die Unterschiede, die in Abb. 16 für einzelne Teilkollektive beobachtet wurden,

lassen sich noch als Zufallsschwankungen erklären. Bei der Betrachtung von psychosomatischen Beschwerden und früher praktizierter Konzeptionsverhütung müssen die Anamnese-faktoren infolgedessen nicht in die Analyse einbezogen werden.

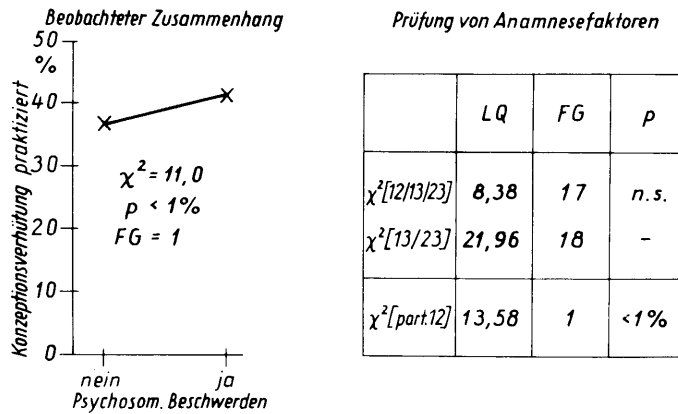


Abb. 15: Prüfergebnisse für den Zusammenhang zwischen psychosomatischen Beschwerden und früher praktizierter Konzeptionsverhütung.

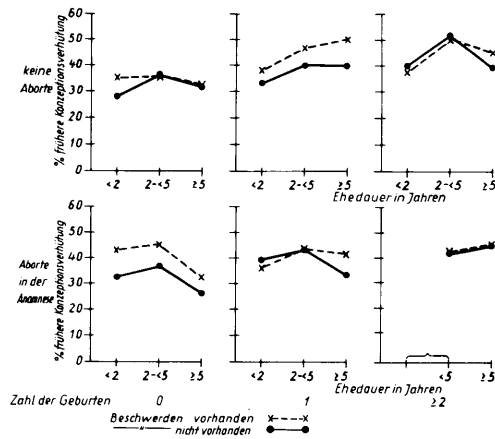


Abb. 16: Früher praktizierte Konzeptionsverhütung gegliedert nach Teilkollektiven.

3.1.3 Alternativverfahren

Das Erkennen und Ausschalten der Wirkung von Hintergrund-Faktoren ist ein Problem, das Statistiker schon lange beschäftigt, lange bevor die Theorien der log-linearen Modelle und der Kovarianzauswahl bekannt waren. Es ist daher nützlich, einige früher verwendete Alternativverfahren zu erwähnen. Die Prüfung von Hintergrund-Faktoren im Rahmen logarithmisch-linearer Modelle wurde von Y.M.M. Bishop (1969) als Alternative zu Cochran's Test (1954) und zum Mantel-Haenszel-Verfahren (1959) diskutiert. J. Fleiss (1973) gibt eine kritische Darstellung der beiden letzteren Verfahren sowie weiterer Standardisierungstechniken, die alle dazu dienen sollen, die Wirkung einer Hintergrundvariablen zu erfassen. Einer der wichtigsten Nachteile mancher dieser Verfahren ist es, daß sie sich nur zur Zusammenhangsprüfung zweiklassiger Variablen verwenden lassen. J. Fleiss erwähnt diesen Nachteil nicht, sondern beschränkt sich stattdessen bewußt auf einfache Methoden, die als rechnerisches Hilfsmittel lediglich weiterhin einen Tischrechner erfordern. Aus diesem Grund klammert er auch das Anpassen log-linearer Modelle aus seiner Betrachtung aus.

3.1.3.1 Standardisierte Chi-Quadrat-Werte

Im folgenden soll nunmehr kurz die Berechnung von sogenannten standardisierten Chi-Quadrat-Werten (z.B. P. Armitage, 1966) als eine Alternative zum oben beschriebenen Prüfverfahren mittels log-linearer Modelle diskutiert werden. Abbildung 17 zeigt beobachtete und standardisierte Prozentzahlen und Chi-Quadrat-Werte für die vier Beispiele aus dem vorhergehenden Kapitel (3.1.2). Bevor wir die Aussagefähigkeit dieser Größen beurteilen, beschreiben wir in unserer Symbolik, auf welche Weise sie berechnet werden können.

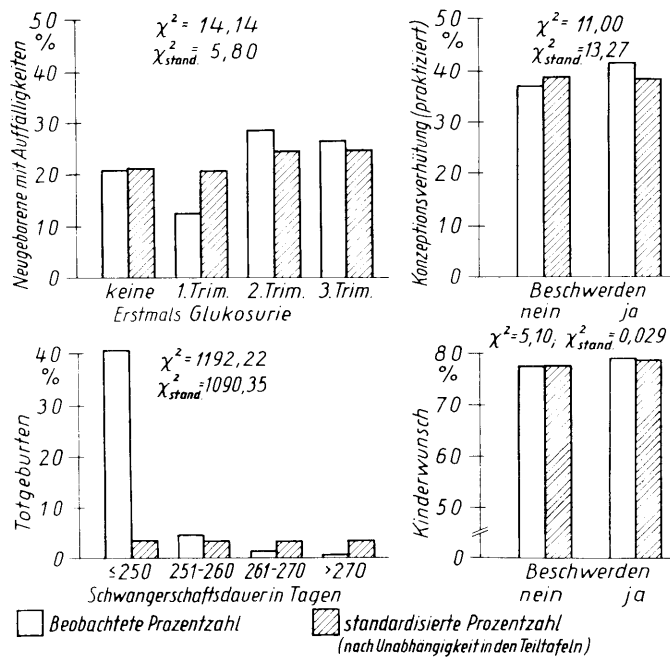


Abb. 17: Beobachtete und standardisierte Prozentzahlen für die Daten in den Abbildungen 7, 10, 13 und 15.

Die standardisierten Fallzahlen ($n_{ij}(\text{stand})$) lassen sich aus den bei Unabhängigkeit in den Teiltafeln erwarteten Fallzahlen dadurch ermitteln, daß über alle Teiltafeln aufsummiert wird:

$$(24) \quad n_{ij}(\text{stand}) = \sum_k \frac{n_{i.k} \cdot n_{.jk}}{n_{..k}} .$$

Sie sind somit Fallzahlen in der Randtafel (12), die sich aus den für Modell 13/23 geschätzten Erwartungswerten ($\hat{m}_{ijk} = n_{i.k} \cdot n_{.jk} / n_{..k}$) ergeben. Der standardisierte Chi-Quadrat-Wert mißt ihre Abweichungen von den beobachteten Fallzahlen n_{ij} :

$$(25) \quad \chi^2(\text{stand}) = \sum_{ij} \frac{(n_{ij} - n_{ij}(\text{stand}))^2}{n_{ij}(\text{stand})}$$

Man behandelt $\chi^2(\text{stand})$ als Prüfgröße für die partielle Assoziation, also wie eine Chi-Quadrat-verteilte Größe mit $(I-1)(J-1)$ Freiheitsgraden (obwohl meines Wissens nicht bewiesen wurde, ob und unter welchen Bedingungen $\chi^2(\text{stand})$ dieser Verteilung folgt). Diese Regel kann nur dann sinnvoll sein, wenn die Assoziation in allen Teiltafeln gleichartig ist. Es läßt sich leicht zeigen, daß bei sich ändernden partiellen Assoziationen $\chi^2(\text{stand})$ jeden beliebigen Wert annehmen kann, also keine Aussagekraft mehr besitzt.

Prüfen wir die Hintergrund_Faktoren in den vier Beispielen in Abbildung 17 anhand der standardisierten Chi-Quadrat-Werte, so kommen wir nur dann zur gleichen Beurteilung dieser Faktoren wie zuvor, wenn wir wissen, in welchen Fällen gleichartige Assoziationen in den Teiltafeln vorliegen und in welchen Fällen nicht. Andernfalls ergeben sich Fehlschlüsse.

Die richtige Überlegung, die sich hinter der Berechnung des standardisierten Chi-Quadrat-Wertes verbirgt, ist die, daß n_{ij} und $n_{ij}(\text{stand})$ übereinstimmen müssen, sofern die beiden Variablen 1 und 2 für alle Ausprägungen (k) der Variablen 3 genau unabhängig sind (die durch Modell 13/23 implizierten Fallzahlen sind gerade $n_{ij}(\text{stand})$). Jedoch besteht bei der alleinigen Verwendung eines standardisierten Chi-Quadrat-Wertes die Gefahr, daß man gegenläufige Assoziationen in den Teiltafeln übersieht oder einfach vergißt, daß n_{ij} und $n_{ij}(\text{stand})$ auch dann übereinstimmen können, wenn in den Teiltafeln unterschiedliche Assoziationen bestehen.

Um gegenläufige Tendenzen in den Teiltafeln aufzudecken, betrachtet man häufig zusätzlich zu $\chi^2(\text{stand})$ für jede einzelne Teiltafel eine Prüfgröße für die Unabhängigkeit. Man berechnet zum Beispiel

$$(26) \sum_{ij} \frac{(n_{ijk} - n_{i.k} \cdot n_{.jk} / n_{i.k})^2}{n_{i.k} \cdot n_{.jk} / n_{i.k}} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, K$$

und behandelt jede dieser K Größen wieder als χ^2 -verteilt mit $(I-1)(J-1)$ Freiheitsgraden. Nun ist es zwar richtig, daß sich im allgemeinen gegenläufige partielle Assoziationen auch in diesen Größen niederschlagen werden, daß dies aber nicht notwendig so sein muß, zeigt das folgende Gegenbeispiel. In diesem Beispiel ist $\chi^2 [12/13/23]$ signifikant, es bestehen also sich ändernde partielle Assoziationen in den Teiltafeln. Diese können jedoch bei einer getrennten Betrachtung der einzelnen Teiltafeln auf Grund der kleinen Fallzahlen nicht nachgewiesen werden. Das Beispiel verdeutlicht somit, daß der Test für Modell 12/13/23 die Wirkung eines Hintergrundfaktors nachweisen kann, der bei einer getrennten Betrachtung der Teiltafeln und durch ein standardisiertes Chi-Quadrat nicht festgestellt werden kann.

Die drei Chi-Quadrat-Werte in den Teiltafeln sind alle kleiner als $\chi^2_{.95;1} = 3,84$ und $\chi^2(\text{stand}) = 0$. Man würde somit in diesem Beispiel - fälschlicherweise - folgern, daß die beiden Variablen bedingt unabhängig seien (Tab. 3).

Auf ähnliche Weise ließe sich ein Zahlenbeispiel konstruieren, in dem man aufgrund des standardisierten Chi-Quadrates und der Chi-Quadrat-Werte in den Teiltafeln folgerte, daß der Hintergrund-Faktor unwichtig sei, obwohl in Wirklichkeit der Zusammenhang gerade durch das Wirken des Hintergrund-Faktors in den Teilkollektiven modifiziert wird.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Beurteilung eines Hintergrund faktors anhand eines standardisierten Chi-Quadrat-Wertes nur dann empfohlen werden kann, wenn aus sachlichen a-priori Überlegungen bekannt ist, daß der Zusammenhang der untersuchten Größen in den Teilkollektiven gleichartig sein muß.

Tab. 3: Fiktives Beispiel zur Beurteilung der Wirkung von Hintergrundfaktoren

Randtafel mit beobachteten Fallzahlen (n_{ij}):																																																
168	92	260	$\chi^2 = 6,59; p < 5 \%$																																													
72	68	140		$\chi^2_{(\text{stand})} = 0$																																												
240	160	400	$\chi^2 [12/13/23] = 6,97; p < 5 \%$																																													
Teiltafeln mit beobachteten Fallzahlen (n_{ijk}) und bei Unabhängigkeit in den Teiltafeln erwartete Fallzahlen ($n_{i..k} \cdot n_{.jk} / n_{..k}$) für $k = 1, 2, 3$.																																																
$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$																																														
<table border="1"> <tr><td>18</td><td>22</td><td>40</td></tr> <tr><td>(18,4)</td><td>(21,6)</td><td></td></tr> <tr><td>28</td><td>32</td><td>60</td></tr> <tr><td>(27,6)</td><td>(33,4)</td><td></td></tr> <tr><td>46</td><td>54</td><td>100</td></tr> </table>	18	22	40	(18,4)	(21,6)		28	32	60	(27,6)	(33,4)		46	54	100	<table border="1"> <tr><td>26</td><td>16</td><td>40</td></tr> <tr><td>(20)</td><td>(20)</td><td></td></tr> <tr><td>26</td><td>34</td><td>60</td></tr> <tr><td>(30)</td><td>(30)</td><td></td></tr> <tr><td>50</td><td>50</td><td>100</td></tr> </table>	26	16	40	(20)	(20)		26	34	60	(30)	(30)		50	50	100	<table border="1"> <tr><td>126</td><td>54</td><td>180</td></tr> <tr><td>(129,6)</td><td>(50,4)</td><td></td></tr> <tr><td>18</td><td>2</td><td>20</td></tr> <tr><td>(14,4)</td><td>(5,6)</td><td></td></tr> <tr><td>144</td><td>56</td><td>200</td></tr> </table>	126	54	180	(129,6)	(50,4)		18	2	20	(14,4)	(5,6)		144	56	200	
18	22	40																																														
(18,4)	(21,6)																																															
28	32	60																																														
(27,6)	(33,4)																																															
46	54	100																																														
26	16	40																																														
(20)	(20)																																															
26	34	60																																														
(30)	(30)																																															
50	50	100																																														
126	54	180																																														
(129,6)	(50,4)																																															
18	2	20																																														
(14,4)	(5,6)																																															
144	56	200																																														
$\chi^2 = 0,03$	$\chi^2 = 2,56$	$\chi^2 = 3,57$																																														
Kreuzproduktenverhältnisse in den Teiltafeln																																																
$\frac{18/22}{28/32} = 0,93$	$\frac{24/16}{26/34} = 1,97$	$\frac{126/54}{18/2} = 0,26$																																														

3.1.3.2 Randomisieren und Paarbildung

Ist die Datensammlung bereits abgeschlossen, so bleibt dem Statistiker nur ein geschicktes Betrachten der Daten und das Berechnen von Prüfgrößen, wenn er die Wirkung von Hintergrund-Faktoren feststellen will. Anders ist die Situation dagegen, wenn eine Studie erst geplant wird. In diesem Fall kann die Strukturgleichheit der Beobachtungen

in bezug auf Hintergrund-Faktoren noch eher herbeigeführt werden. Je nachdem, ob man sich gegenüber dem Einfluß von nicht genau spezifizierten Hintergrund-Faktoren schützen will, oder ob man den störenden Einfluß von bekannten Hintergrundfaktoren beseitigen will, wird man entweder an Randomisieren (vgl. W.G. Cochran, G. Cox, 1957) oder an Paarbildung (vgl. W.G. Cochran (1968), D.B. Rubin (1973)) als angemessene Verfahren denken. Die Möglichkeit zum Randomisieren besteht meist nur, wenn die Durchführung eines Experimentes geplant wird, nicht aber wenn Beobachtungsreihen erhoben werden. Das Prinzip der Paarbildung dagegen kann in beiden Situationen verwendet werden. Es ist unter der Bezeichnung "Matching" bei Beobachtungsreihen und unter der Bezeichnung "Blocking" in der Versuchsplanung bekannt.

Die Datenanalyse mittels log-linearer Modelle oder anhand von Kovarianzselektionsmodellen kann diese, zur sorgfältigen Planung gehörigen, Methoden keinesfalls ersetzen, sondern sie höchstens ergänzen oder ihre Wirksamkeit überprüfen. Als Beispiel sei der Bericht aus dem "Boston Drug Surveillance Program" (H. Jick et al., 1974) über den Zusammenhang zwischen Reserpineinnahme und Brustkrebs diskutiert. Bei dieser Untersuchung wurde das Prinzip der Paarbildung auf das Alter angewandt. Genauer gesagt, wurden zu 150 Fällen von Brustkrebs im Alter passende Fälle aus den Gruppen chirurgisch oder anderweitig behandelte Patientinnen ausgesucht. Innerhalb beider Gruppen wurde nach früherer Reserpineinnahme gefragt. Das Ergebnis ist in der folgenden Übersicht wiedergegeben, aus der deutlich wird, daß die Fallzahlen für die interessierenden Ereignisse recht klein sind und somit die Aussagekraft der Ergebnisse abschwächen.

Tab. 4: Reserpineinnahme bei Patientinnen verschiedener Altersgruppen

Alter (3)	Patientengruppe (2)	Reserpineinnahme (1)		
		ja (%)	nein	zus.
<50	Brustkrebsfälle	1 (1,9)	53	54
	chirurgische Kontrollen	2 (1,0)	214	216
	medizinische Kontrollen	0 (0,0)	216	216
50 - 59	Brustkrebsfälle	2 (5,4)	35	37
	chirurgische Kontrollen	2 (1,4)	146	148
	medizinische Kontrollen	2 (1,4)	146	148
>60	Brustkrebsfälle	8 (13,5)	51	59
	chirurgische Kontrollen	9 (3,8)	227	236
	medizinische Kontrollen	11 (4,7)	225	236

Der Sinn der Paarbildung nach dem Alter ist es dabei, einen möglichen Zusammenhang zwischen Brustkrebs und Reserpineinnahme unter - sonst gleichbleibenden- Bedingungen zu untersuchen, also unter Ausschaltung des mit zunehmendem Alter erhöhten Risikos, an Brustkrebs zu erkranken. Die normalerweise im Gesamtkollektiv bestehende Assoziation zwischen Patientengruppe (2) und Alter (3) wurde künstlich beseitigt: die Beobachtungszahlen in der Randtafel 23 spiegeln diese durch den Stichprobenplan herbeigeführte Unabhängigkeit wider (vgl. die letzte Spalte von Tabelle 4). Daß die Auswirkungen von Reserpineinnahme und Alter auf die Brustkrebsinzidenz unvermischt gemessen werden, ist damit allein noch nicht gewährleistet, aber z.B. dann, wenn es in jedem Kollektiv einen gleichartigen Zusammenhang gibt. Dies wird nunmehr für die Daten in Tabelle 4 überprüft.

Es werden die in Kapitel 3.1.1 definierten Prüfgrößen berechnet. Zunächst diejenige für Modell 12/13/23: χ^2 [12/13/23] hat einen Wert von nur 3,02 bei 4 Freiheitsgraden. Die Hypothese, daß die partiellen Assoziationen gleichartig sind, wird somit nicht widerlegt. Weiterhin ergeben sich die folgenden Aussagen:

1. Alter (2) und Brustkrebs (3) sind in den beiden Patientengruppen, die sich durch Reserpineinnahme (1) unterscheiden, unabhängig. Dies folgt daraus, daß χ^2 [part. 23] vier Freiheitsgrade und einen Wert von 0,23 hat, beziehungsweise aus der Betrachtung der Fallzahlen in Tabelle 5, dargestellt als Teiltafeln 23:

		Reserpineinnahme (1)					
		ja			nein		
Patienten- gruppe (2)		Alter (3)			Alter (3)		
				1	2	8	53
		2	2	9	214	146	227
		0	1	11	216	146	225

2. Der Zusammenhang zwischen Reserpineinnahme (1) und Brustkrebs (2) bestätigt sich in jeder der drei Altersgruppen (3): χ^2 [part. 12] hat 2 FG und einen Wert von 10,03. Die Ausgangstabelle, Tabelle 4, zeigt dies in den Teiltafeln 12.

3. Schließlich steigt die Reserpineinnahme (1) in allen drei Patientengruppen (2) mit dem Alter (3): χ^2 [part. 13] hat 2 FG und einen Wert von 23,51. Die Teiltafeln 13 zeigen dies ebenfalls deutlich.

Brustkrebsfälle	Patientengruppen (2)																			
	chir. Kontrollen	med. Kontrollen																		
Alter (3)	Alter (3)	Alter (3)																		
(1) <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>53</td><td>35</td><td>51</td></tr> </table>	1	2	8	53	35	51	(1) <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>2</td><td>2</td><td>9</td></tr> <tr><td>214</td><td>146</td><td>227</td></tr> </table>	2	2	9	214	146	227	(1) <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>0</td><td>2</td><td>11</td></tr> <tr><td>216</td><td>146</td><td>125</td></tr> </table>	0	2	11	216	146	125
1	2	8																		
53	35	51																		
2	2	9																		
214	146	227																		
0	2	11																		
216	146	125																		

(1) = Reserpineinnahme

Wir haben damit dargestellt, daß eine Analyse mittels log-linearer Modelle die Paarbildung sinnvoll ergänzen kann und daß die Berechnung der Prüfgrößen die Interpretation der Daten erleichtert.

Ohne eingehende statistische Analyse in der vorgeführten Art kann der sich in den Daten der Tabelle 4 zeigende Zusammenhang leicht mißverstanden werden (H. Immich, 1974). Wie wir gezeigt haben, ist es nicht richtig, wenn die erhöhte Brustkrebsinzidenz bei Reserpineinnahme als eine Folge der mit zunehmendem Alter höheren Reserpineinnahme gedeutet wird. Es muß aber betont werden, daß unsere Analyse nicht klären sollte und nicht geklärt hat, ob andere Größen als das Alter systematische Unterschiede in den verglichenen Gruppen bewirkten.

3.2 Datengesteuerte Suche nach Zusammenhangsstrukturen

Im vorigen Kapitel wurden die Likelihoodquotiententests für partielle Assoziationen zur Beantwortung einer klar definierten Fragestellung herangezogen, die nur zwei relativ einfache Zusammenhangsstrukturen betraf. Nunmehr sollen diese Tests in einer völlig anderen Situation verwendet werden. Gefragt wird: gibt es einfache Zusammenhangsstrukturen, die sich in den Daten erkennen lassen? Die Antwort wird gegeben, indem man schrittweise und systematisch nach einfachen Modellen sucht. Die Fragestellung ist somit vage, die Zahl der möglichen Antworten groß und die Interpretierbarkeit der Ergebnisse ungewiß. Nichtsdestoweniger stellt die datengesteuerte Suche nach einfachen Strukturen eine wichtige Anwendungsmöglichkeit der Theorie der log-linearen Modelle und der Theorie der Kovarianzauswahl dar.

3.2.1 Methodik

Multiplikative Modelle (M.W. Birch (1963), Y.M.M. Bishop (1969), L. Goodman (1970)) kennzeichnen einfache Zusammenhangsstrukturen von qualitativen wie auch von quantitativen Variablen (N. Wermuth, 1976a). Auf solche Modelle beschränkt sich das hier dargestellte Suchverfahren (N. Wermuth, 1976b). Andere Verfahren der Modellsuche, die komplexere Modelle einbeziehen - und infolgedessen iterative Rechenverfahren verwenden -, wurden für Kontingenztafeln zum Beispiel von L. Goodman (1971, 1973) und für Kovarianzmatrizen von A.P. Dempster (1972) vorgeschlagen.

Der Gedankengang, welcher der hier geschilderten Art der Modellsuche zugrunde liegt, ist einfach. Ausgehend von der kompliziertesten Zusammenhangsstruktur, in der alle Variablen als interdependent angesehen werden, wird schrittweise ermittelt, wie viele und welche Variablenpaare als bedingt unabhängig gelten können. Je mehr Variablenpaare bedingt unabhängig sind, desto einfacher ist im allgemeinen die Zusammenhangsstruktur, die sich am Ende des Suchprozesses ergibt.

Zunächst ein Beispiel: Bei der Untersuchung von fünf Variablen seien in drei Schritten die bedingten Abhängigkeiten der Variablenpaare (1,2), (1,3) und (2,3) beseitigt worden. Jeder dieser "Rückwärtsselektions"-Schritte kann beschrieben werden, indem man sich auf die Indizes der Variablen beschränkt. Die Zusammengehörigkeit von Variablen wird dadurch gekennzeichnet, daß man die entsprechenden Indizes zusammenhängend schreibt und die einzelnen Indexkombinationen durch Klammern voneinander absetzt. Die bedingte Unabhängigkeit eines Variablenpaares drückt sich darin aus, daß die Indizes der beiden betreffenden Variablen nicht gemeinsam innerhalb derselben Klammer vorkommen. Eine mögliche schematische Darstellung der Auswahl Schritte für unser Beispiel wurde bereits in Kapitel 2.3 angedeutet.

<u>Schritt</u>	<u>Indexkombination</u>	<u>Bedingt unabhängige Variablenpaare</u>
0	(12345)	keines
1	$\frac{(1345)(2345)}{(345)}$	(1,2)
2	$\frac{(145)(2345)}{(45)}$	(1,3)(1,2)
3	$\frac{(145)(245)(345)}{(45)(45)}$	(2,3)(1,3)(1,2)

Die angegebenen Indexkombinationen beschreiben, auf welche Weise die gemeinsame Verteilung (Dichte oder Wahrscheinlichkeitsfunktion) der fünf Variablen nach jedem Schritt faktorisiert werden kann und die kurzgefaßte Modellbezeichnung ergibt sich aus den Indizes im Zähler, die durch Schrägstriche getrennt aufgeschrieben werden. Eine andere Möglichkeit, die Auswahl Schritte zu verstehen, besteht darin, sich die veränderten Indexkombinationen anzuschauen. Man sieht aus der vorliegenden Darstellung leicht, daß bei jedem Schritt nur jeweils eine Indexgruppe geändert wurde, und zwar folgendermaßen:

<u>Schritt</u>	<u>Assoziationsänderung</u>
1	$(12345) \rightarrow \frac{(1345)(2345)}{(345)}$
2	$(1345) \rightarrow \frac{(145)(345)}{(45)}$
3	$(2345) \rightarrow \frac{(245)(345)}{(45)}$

Bei jedem Schritt ist somit die Assoziationsänderung ähnlich: es wird stets nur eine der zuvor noch als zusammengehörig ausgewiesenen Indexgruppen auseinandergerissen. Daß die vorgenommene Änderung bei allen Schritten gleichartig ist, ist eine Besonderheit der multiplikativen Modelle und der wichtigste Grund für ihre Attraktivität. Die Berechnung von Prüfgrößen für die Güte der Anpassung erweist sich in diesem Falle als besonders einfach, da jeweils nur die bedingte Unabhängigkeit eines Paares in einer Untergruppe aller Variablen zu prüfen ist. Im obigen Beispiel ergäben sich folgende, auf dem Likelihoodquotienten basierende Prüfgrößen:

<u>Schritt</u>	<u>Likelihoodquotienten (LQ)-Prüfgrößen</u>
1	$T_{12345} - (T_{1345} + T_{2345} - T_{345})$
2	$T_{1345} - (T_{145} + T_{345} - T_{45})$
3	$T_{2345} - (T_{245} + T_{345} - T_{45})$.

Hierbei sind die Symbole für qualitative und quantitative Variable jeweils anders definiert, so wie es kurz in Kapitel 2.3 und ausführlicher bei N. Wermuth (1976a) angegeben wurde.

Eine Modellsuche ist immer dann datengesteuert, wenn die Reihenfolge der angepaßten Modelle nicht vom Untersuchenden vorgegeben wird, sondern vielmehr allein von den jeweiligen Beobachtungen abhängt. Wir verwenden zur Modellsuche die folgende Regel:

Bei jedem Schritt wird dasjenige multiplikative Modell ausgewählt, das die beste Anpassung (gemessen durch LQ-Prüfgrößen) liefert.

Über die Frage, ab wann eine Anpassung nicht mehr gut genug ist, besteht in der Literatur wenig Einigkeit. So gibt es bei den Variablen-Selektionsverfahren in der Regressions- oder in der Diskriminanzanalyse fast unzählige Vorschläge (vgl. A.P. Dempster, M. Schatzoff, N. Wermuth, 1976). Man sollte dieser Frage kein zu großes Gewicht beimessen: Wenn es eine eindeutige Struktur gibt, die den Zusammenhang der Variablen beschreibt, so ist dies sicherlich daran zu erkennen, daß die Anpassung bei einer zusätzlichen Vereinfachung der Modellannahmen wesentlich schlechter wird. Wir sehen dies als den wichtigsten Indikator für eine schlechte Anpassung an; aber wir vergleichen auch die Prüfgrößen jeweils mit dem zugehörigen fünfprozentigen Signifikanzniveau und bezeichnen eine Überschreitung dieses Niveaus als signifikant. Eine Veränderung des "signifikanten Niveaus" bei jedem einzelnen Schritt wäre ebenso denkbar. Es ist aber im Zusammenhang mit datengesteuerten Suchverfahren abzuraten, von "Signifikanz und Testergebnissen" im Sinne der Neyman-Pearson'schen Testtheorie zu sprechen. Man sollte diese Tatsache nicht dadurch verschleiern, daß man in diesem Zusammenhang eine Diskussion über das "inferenzstatistisch richtige Signifikanzniveau" beginnt.

3.2.2 Anwendungsbeispiele

Obwohl das soeben erläuterte Modellsuchverfahren grundsätzlich auf Datenmengen mit einer beliebig großen Anzahl von Variablen angewandt werden kann, haben die hier beschriebenen Beispiele nur wenige Variable. Erstens läßt sich bereits an wenigen Variablen das Vorgehen und die Art der Interpretation der Ergebnisse darstellen, und zweitens sind die Computerprogramme (vgl. Kap. 2.4) zunächst für nicht mehr als 10 Variable verfügbar.

Es werden nunmehr zwei Fälle behandelt, in denen die Daten als Korrelationen vorliegen, sowie ein weiterer Fall, in dem die Daten in Form einer Kontingenztafel zusammengefaßt sind. Anhand der ersten Datenmenge wird nach der Zusammen-

hangsstruktur von fünf Indikatoren der Reife eines Neugeborenen gefragt und anhand der zweiten Datenmenge nach der Struktur von neun Persönlichkeitsmerkmalen. Bei den qualitativen Daten des dritten Beispiels interessiert die Interdependenz von vier Symptomen bei depressiven Patienten.

3.2.2.1 Modellsuche in Korrelationsmatrizen

Die hier verwendeten Daten stammen zum einen aus der Studie "Schwangerschaftsverlauf und Kindesentwicklung", zum anderen aus einer Untersuchung von V. Hodapp und G. Weyer über Hypertonie. Diese Untersuchung wurde im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 36 der Deutschen Forschungsgemeinschaft durchgeführt.

a) Reifemerkmale

Wir wollen die Frage untersuchen, wieviele und welche Indikatoren nötig sind, damit man sich ein genaues Bild über die Reife eines Neugeborenen machen kann. Information über jeden von fünf verschiedenen Indikatoren liegt für 2.473 männliche und 2.276 weibliche Neugeborene vor. Die Daten enthalten weder Ausreißer noch fehlende Werte. Ein Rückschluß auf Populationsgrößen ist daher nur eingeschränkt möglich. Die fünf Variablen sind:

- (1) Gestationsdauer
- (2) Kopfumfang
- (3) Geburtsgewicht
- (4) Körpergröße
- (5) Reife-Indikator

Die letzte Variable ist eine Reifezahl, konstruiert aus Informationen wie Apgar-Wert, Länge der Fingernägel und der Körperbehaarung (S. Koller, 1974). Die Annahme, daß alle Variablen marginal normalverteilt seien, ist nur annähernd erfüllt, wie aus den Histogrammen in Abb. 18 ersichtlich ist.

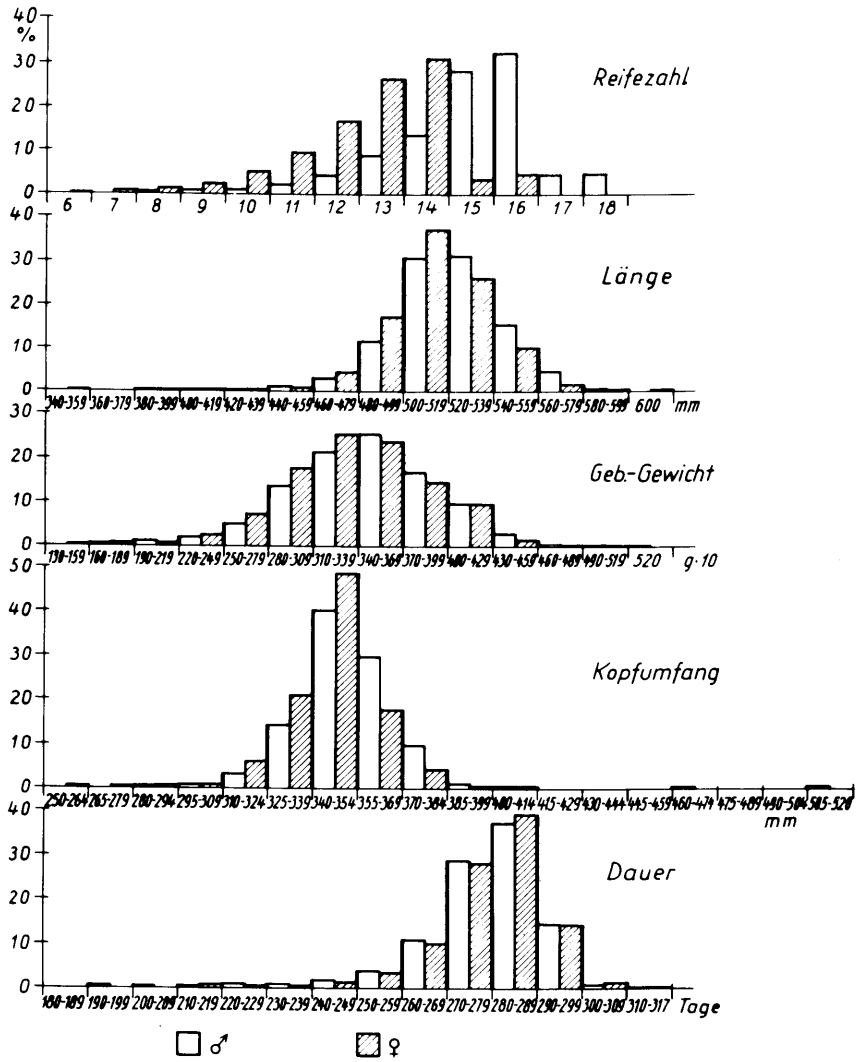


Abb. 18: Beobachtete Häufigkeitsverteilungen von fünf Reifemerkmale für 2.473 männliche und 2.276 weibliche Neugeborene

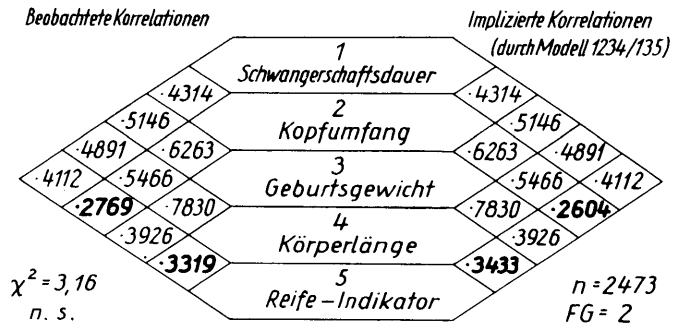


Abb. 19: Beobachtete und durch Modell 1234/135 implizierte Korrelationen von Indikatoren der Reife; für männliche Neugeborene

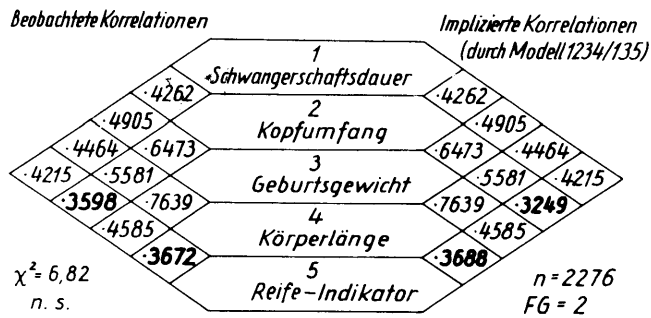


Abb. 20: Beobachtete und durch Modell 1234/135 implizierte Korrelationen von Indikatoren der Reife; für weibliche Neugeborene

Die beobachtete Korrelationsmatrix sowie das Ergebnis der Modellsuche wurde in Abb. 19 für die männlichen und in Abb. 20 für die weiblichen Neugeborenen dargestellt. Die einfachste Struktur, die sich noch gut mit den Daten vereinbaren läßt, ergibt in beiden Fällen das Modell 1234/135. Die rein formale Interpretation dieses Modells ist, daß die Reifezahl (5) unabhängig von Körperlänge (4) und Kopfumfang (2) ist, sobald man genaue Informationen über Gestationsdauer (1) und Körpergewicht (3) hat. Das bedeutet, daß man bei einer Beurteilung der Reife von Kindern mit einer bestimmten Tragzeit (1) und Geburtsgewicht (3) aus der Reifezahl (5) nicht auf den Kopfumfang (2) oder die Körperlänge (4) schließen kann. Also liefert die Reifezahl (5) selbst bei gegebener Tragzeit und Gewicht (1 und 3) Informationen über die Reife, die mit den Indikatoren Länge und Kopfumfang (2 und 4) noch nicht erfaßt wird.

Im folgenden werden die einzelnen Schritte erläutert, die zur Auswahl von Modell 1234/135 führten, d.h. es wird die Berechnung und Beurteilung der Prüfgrößen in Tabelle 5 erklärt. Im ersten Schritt wird aus der Matrix mit allen fünf Variablen für jedes Variablenpaar eine Prüfgröße errechnet. So ergibt sich in Tab. 5 zum Beispiel für die Paare (1,2) und (1,3):

$$(1,2): 55,62 = -2.473(\ln D_{12345} - (\ln D_{1345} + \ln D_{2345} - \ln D_{345}))$$

$$(1,3): 40,38 = -2.473(\ln D_{12345} - (\ln D_{1245} + \ln D_{2345} - \ln D_{245}))$$

Dabei ist D_{245} die Determinante der Korrelationsmatrix mit den Variablen 2, 4 und 5, alle weiteren Determinanten sind analog definiert. Eine äquivalente Berechnung der Prüfgrößen wäre mittels der partiellen Korrelationskoeffizienten möglich. So ergäbe sich für die Variablenpaare (1,2) und (1,3):

$$(1,2): 55,62 = -2.473 \ln (1 - r^2_{12.345})$$

$$(1,3): 40,38 = -2.473 \ln (1 - r^2_{13.245})$$

Tabelle 5: Auswahlsschritte bei der Modellsuche für Reifemerkmale männlicher und weiblicher Neugeborener

Variablen- paar	Schritt 1		Schritt 2		Schritt 3		
	LQ- χ^2 σ	LQ- χ^2 ϕ	Teil- matrix	LQ- χ^2 σ	LQ- χ^2 ϕ	Teil- matrix	LQ- χ^2 ϕ
(1,2)	55,62	39,82	-	-	-	1234	54,33
(1,3)	40,38	35,14	-	-	-	-	-
(1,4)	45,13	26,52	1234	52,96	27,06	1234	52,96
(1,5)	173,02	137,94	1235	180,85	138,48	1235	180,41
(2,3)	313,39	306,57	-	-	-	1234	313,58
(2,4)	21,26	28,32	1234	21,00	28,15	1234	21,00
(2,5)	1,72	6,80	1235	1,45	6,63	x	x
(3,4)	1206,43	982,69	1234	1206,04	1206,95	1234	1262,04
(3,5)	56,82	93,44	1235	112,44	137,70	135	136,31
(4,5)	1,34	0,18	x	x	x	x	x
ausgewähl- tes Modell	1234/1235		1234/135		123/124/135		

- bedeutet, daß das zugehörige Modell nicht multiplikativ ist
- x bedeutet, daß das zugehörige Variablenpaar in einem vorhergehenden Schritt ausgewählt wurde, bedingt unabhängig zu sein.

Der Tabelle 5 ist zu entnehmen, daß die kleinste der Prüfgrößen 1,34 ist. Das zugehörige Variablenpaar ist (4,5). Da (1,34) kleiner als $\chi^2_{.95;1} = 3.84$ ist, schließt man, daß Modell 1234/1235 mit den Daten vereinbar ist.

Im nächsten Schritt wird geprüft, ob außer (4,5) noch andere Variablenpaare als bedingt unabhängig gelten können. Die gleichzeitige bedingte Unabhängigkeit von (4,5) und entweder (1,2), (1,3) oder (2,3) ergäbe kein multiplikatives Modell, also keine einfache Zusammenhangsstruktur (vgl. Kapitel 3.2.1). Daher werden nur für die restlichen Paare Prüfgrößen berechnet. So ergibt sich etwa für:

$$\begin{aligned}(1,4): 52,96 &= -2.473(\ln D_{1234} - (\ln D_{123} + \ln D_{234} - \ln D_{23})) \\ &= -2.473(1 - r^2_{14.23})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1,5): 180,85 &= -2.473 (\ln D_{1235} - (\ln D_{123} + \ln D_{235} - \ln D_{23})) \\ &= -2.473 (1 - r^2_{15.23}) \cdot\end{aligned}$$

Zur Berechnung der ersten Größe wird die Teilmatrix mit den Variablen 1, 2, 3, 4, für die zweite Größe die Teilmatrix mit den Variablen 1, 2, 3, 5 herangezogen. Die kleinste Prüfgröße bei diesem zweiten Auswahlschritt ist 1,45. Das zugehörige Variablenpaar ist (2,5). Da 1,45 kleiner als $\chi^2_{.95;1} = 3,84$ ist, darf man schließen, daß auch die **partielle Assoziation des Variablenpaares (2,5) nicht wesentlich von Null verschieden ist. Mit (4,5) und (2,5) als bedingt unabhängigen Variablenpaaren akzeptiert man gleichzeitig Modell 1234/135 als noch mit den Daten vereinbar (vgl. Kap. 2.3).**

Weitere Unabhängigkeitsannahmen führen zu schlechten Anpassungen (vgl. Schritt 3). Aus diesem Grunde wird Modell 1234/135 als die einfachste aus den Daten erkennbare Struktur angenommen. Trotz unterschiedlicher beobachteter Korrelationen bei männlichen und weiblichen Neugeborenen läßt sich in beiden Fällen die Zusammenhangsstruktur der Reifeindikatoren mit dem Modell 1234/135 beschreiben.

b) Persönlichkeitsmerkmale

In diesem zweiten Beispiel, in dem die Daten ebenfalls in Gestalt einer Korrelationsmatrix vorliegen, soll untersucht werden, ob es zusammengehörige Gruppen von Persönlichkeitsmerkmalen gibt. Für 301 Personen liegen Korrelationen der neun Skalen des Freiburger Persönlichkeitsinventars (FPI) vor (J. Fahrenberg, H. Selg (1970)). Jede der neun Variablen hat neun mögliche Ausprägungen. Die Variablen und ihre sogenannten Pole sind:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| (1) = <u>Nervosität</u> | psychosomatisch
nicht gestört | - psychosomatisch
gestört |
| (2) = <u>Aggressivität</u> | nicht aggressiv,
beherrscht | - aggressiv,
emotional unreif |
| (3) = <u>Depressivität</u> | zufrieden,
selbstsicher | - mißgestimmt,
selbstunsicher |
| (4) = <u>Erregbarkeit</u> | ruhig, stumpf | - reizbar, leicht frustriert |
| (5) = <u>Geselligkeit</u> | ungesellig, zurück-
haltend | - gesellig, lebhaft |
| (6) = <u>Gelassenheit</u> | irritierbar, zögernd | - selbstvertrauend,
gutgelaunt |
| (7) = <u>Dominanzstreben</u> | nachgiebig, gemäßigt | - sich durchsetzend, streng |
| (8) = <u>Gehemtheit</u> | ungezwungen, kontakt-
fähig | - gehemmt, gespannt |
| (9) = <u>Offenheit</u> | verschlossen,
unkritisch | - offen, selbstkritisch |

Wie die relative Häufigkeitsverteilung zeigt (Abb. 21), können die neun Skalen als annähernd normalverteilt gelten.

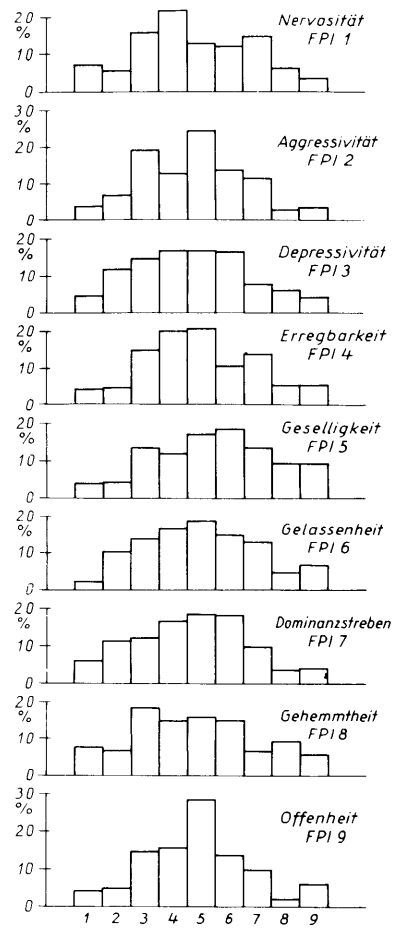


Abb. 21: Beobachtete Häufigkeitsverteilungen von neun Persönlichkeitsmerkmalen des Freiburger Persönlichkeitsinventars (FPI) für 301 Probanden ohne klinische Befunde

Als einfache, mit den Daten zu vereinbarende Struktur für den Zusammenhang der Merkmale ergibt sich das Modell 13568/234679. Die beobachteten und die bei diesem Modell implizierten Korrelationen sind in Abbildung 22 wiedergegeben.

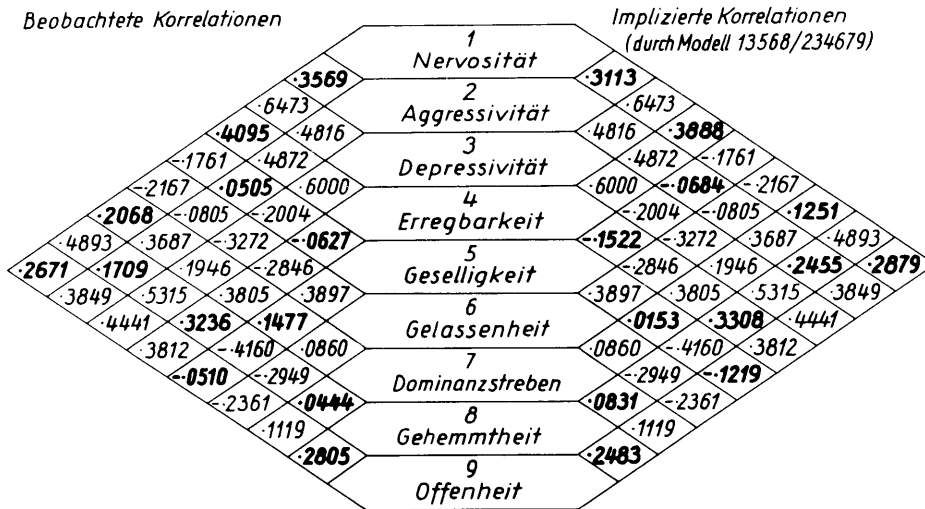


Abb. 22: Beobachtete und durch Modell 13568/234679 implizierte Korrelationen von Persönlichkeitsmerkmalen; für Probanden ohne klinische Befunde

Alle wichtigen beobachteten Korrelation ($r \geq .25$) werden bei diesen Modellannahmen gut reproduziert. Modell 13568/234679 ist dadurch gekennzeichnet, daß die zwei Variablengruppen (158) und (2479) völlig unabhängig voneinander sind, nachdem jede dieser sieben Variablen vom Einfluß der beiden restlichen Variablen 3 und 6 bereinigt wurde. Diese Struktur drückt sich in den Korrelationskoeffizienten so aus, daß die partiellen Interkorrelationen zwischen den ersten beiden Gruppen, (158) und (2479), verschwinden.

Es lassen sich somit zwei Gruppen von Persönlichkeitsmerkmalen deutlich trennen, zumindest, wenn man zwei der Merkmale, nämlich Depressivität (3) und Gelassenheit (6), unverändert hält. Diese beiden Merkmalsgruppen sind einerseits Nervosität (1), Geselligkeit (5) und Gehemmtheit (8), andererseits Aggressivität (2), Erregbarkeit (4), Dominanzstreben (7) und Offenheit (9). Dieses Ergebnis befindet sich in guter Übereinstimmung mit bekannten Theorien über die Persönlichkeitsstruktur (H.J. Eysenck (1958), K. Pawlik (1968)). Die zweite Merkmalsgruppe, diejenige, welche aggressives, reizbares, strenges, selbstkritisches Benehmen kennzeichnet, kann als Indiz für den Persönlichkeitsfaktor Neurotizismus angesehen werden. Die Variablen der ersten Merkmalsgruppe, also psychosomatische Störungen, zurückhaltendes, gehemmtes Verhalten können als Zeichen der Introversion gelten. In der vorliegenden Stichprobe korrelieren Depressivität (3) und Gelassenheit (6) stark mit Merkmalen beider Gruppen. Diese Tatsache bewirkt, daß alle neun Persönlichkeitsmerkmale in der beobachteten Korrelationsmatrix deutlich interkorreliert erscheinen. Aus diesem Grund ist es kaum möglich, die beiden trennbaren Merkmalsgruppen, (158) und (2479), bereits in der beobachteten Korrelationsmatrix zu identifizieren. In Daten von Personengruppen, die hinsichtlich der Merkmale Depressivität (3) und Gelassenheit (6) homogen sind, dürften dagegen - sofern Modell 13568/234679 tatsächlich die Struktur der Persönlichkeitsmerkmale erfaßt - die Merkmalsgruppen (158) und (2479) auch marginal kaum mehr interkorrelieren.

Das Modellsuchverfahren hat in diesem Beispiel zweierlei geleistet. Erstens wurde eine interpretierbare Struktur aufgedeckt, und zweitens konnten überprüfbare Hypothesen für weitere Untersuchungen formuliert werden. Eine ausführlichere Darstellung der Ergebnisse findet sich in einer Arbeit von N. Wermuth, V. Hodapp und G. Weyer (1976).

Im folgenden werden die Überlegungen, die zur Wahl des Modells 13568/234679 führen, kurz beschrieben. Für neun Variable gibt es $\binom{9}{2} = 36$ verschiedene Variablenpaare und somit 36 Auswahlsschritte bis alle paarweisen partiellen Assoziationen ($\rho_{ij.k}$) eliminiert sind. In Tabelle 6 ist das bei jedem Schritt ausgewählte Variablenpaar mit seinem zugehörigen Chi-Quadrat-Wert bei einem Freiheitsgrad angegeben. Ein hoher Chi-Quadrat-Wert weist darauf hin, daß die partielle Assoziation des Variablenpaares nicht eliminiert werden kann, ohne daß sich die Abweichungen zwischen beobachteten und implizierten Korrelation stark vergrößern.

Die Bezeichnung der jeweils zugehörigen Modelle wurde der Übersichtlichkeit wegen nur bei einigen Auswahlsschritten explizit angeführt. Da die Modellinterpretation etwas schwierig wird, wenn zu viele verschiedene Variablengruppen ausgewiesen werden, fassen wir einige bereits durch Schrägstriche getrennte Indexgruppen wieder zusammen. Die Modellanpassung an die Beobachtungen kann sich durch ein solches Vorgehen nur verbessern, und man erhält einfacher zu interpretierende Modelle. So erhalten wir bei Schritt 14 das Modell 135678/234679, bei Schritt 19 das Modell 13568/234679 und bei Schritt 22 Modell 13568/23479. Bei der Entscheidung für eines dieser Modelle ist die Güte der Anpassung gegen die Einfachheit der Struktur abzuwägen. Noch besser als durch das bereits beschriebene Modell 13568/234679 wären die beobachteten Korrelationen durch Modell 135678/234679 reproduziert worden. Die Struktur dieses Modells ist jedoch komplizierter als diejenige des von uns ausgewählten Modells.

Tab. 6: Auswahlsschritte bei der Modellsuche für Persönlichkeitsmerkmale

Auswahl- schritt	gewähltes Variablen- paar	LQ- χ^2	angenommenes Modell
1	(1,5)	0,000	12346789/23456789
2	(1,6)	0,003	
3	(6,8)	0,002	
4	(1,4)	0,07	
5	(4,8)	0,50	123789/235679/234679
6	(4,5)	0,75	
7	(1,9)	1,25	
8	(1,2)	1,08	
9	(2,8)	1,82	
10	(8,9)	1,96	1378/3578/235679/234679
11	(5,9)	1,00	
12	(7,9)	0,91	
13	(4,9)	2,30	
14	(2,5)	3,71	$\frac{1378/3578/3567}{135678} / \frac{23467/2369}{234679}$
15	(1,7)	4,95	
16	(7,8)	0,00	
17	(6,9)	5,23	
18	(2,6)	2,10	
19	(5,7)	6,25	$\frac{138/358/356}{13568} / \frac{2347/2369}{234679}$
20	(4,6)	10,37	
21	(6,7)	7,95	
22	(3,7)	3,95	$\frac{138/358/356}{13568} / \frac{234/247/239}{23479}$
23	(2,9)	14,63	
24	(1,8)	15,63	
25	(2,7)	15,92	
26	(2,3)	22,95	
27	(3,6)	23,87	
28	(3,5)	0,22	
29	(4,7)	47,08	
30	(5,6)	49,58	
31	(5,8)	57,20	
32	(3,9)	66,12	
33	(3,4)	77,85	
34	(2,4)	25,08	
35	(3,8)	99,92	
36	(1,3)	163,44	1/2/3/4/5/6/7/8/9

3.2.2.2 Modellsuche in Kontingenztafeln

Die in unserem dritten Beispiel verwendeten qualitativen Daten stammen von A. Coppen (1966) und wurden zuvor bereits von G.A. Lienert (1971) und von N. Wermuth (1976c) analysiert. Die Daten zeigen den Zusammenhang von vier Symptomen, die an 362 psychiatrisch behandelten Patienten erhoben wurden. Die Merkmale oder Symptome und ihre Ausprägungen sind:

- (1) = V=Validität (Psychasthenie -, Energiegeladenheit +)
- (2) =So=Solidität (Hysterie -, Rigidität +)
- (3) =St=Stabilität (Extraversion -, Introversion +)
- (4) = D=depressive Phase (nein -, ja +)

Die Frage, die den Anlaß zu einer Modellsuche gab, war, ob der beobachtete Zusammenhang der Symptome mit einer einfachen Struktur beschrieben werden kann. Abbildung 23 zeigt einerseits die beobachteten Fallzahlen pro Symptomkombination der vier Merkmale, andererseits die Struktur des ausgewählten Modells 13/14/24. Dieses Modell besagt, daß, für gegebene Ausprägungen des Merkmals (4), das Merkmal (2) unabhängig von den Merkmalen (1) und (3) zusammen ist und daß die Merkmale (1) und (3) für beide Ausprägungen des Merkmals (4) gleichartig assoziiert sind. Das bedeutet, daß man Depressive (4+) und Rekonvaleszenten (4-) als heterogene Patientengruppen ansehen und sie infolgedessen getrennt betrachten sollte (S. Koller, 1963). In jeder dieser beiden Patientengruppen sind Validität (1) und Stabilität (3) gleichartig assoziiert, aber Solidität (2) ist unabhängig von jedem dieser beiden Symptome. Wie in Abb. 23 zu sehen ist, genügt es, die einfachen Assoziationen der Merkmalspaare (1,3), (1,4) und (2,4) zu kennen, um die beobachteten Häufigkeiten aller vier Symptome gut zu reproduzieren. Es gab mehr energiegeladene Rekonvaleszenten als energiegeladene, depressive Patienten (63,6% gegenüber 37,1%) und mehr rigide Depressive als rigide Rekonvaleszenten (55,5% gegenüber 34,3%).

Struktur des Modells SoD/VD/VSt mit $\hat{m}_{ijkl} = \frac{n_{j \cdot l} \cdot n_{i \cdot l} \cdot n_{i \cdot k}}{n_{i \cdot \cdot} \cdot n_{\cdot \cdot l}}$ und

V: i = 1, 2
 So: j = 1, 2
 St: k = 1, 2
 D: l = 1, 2

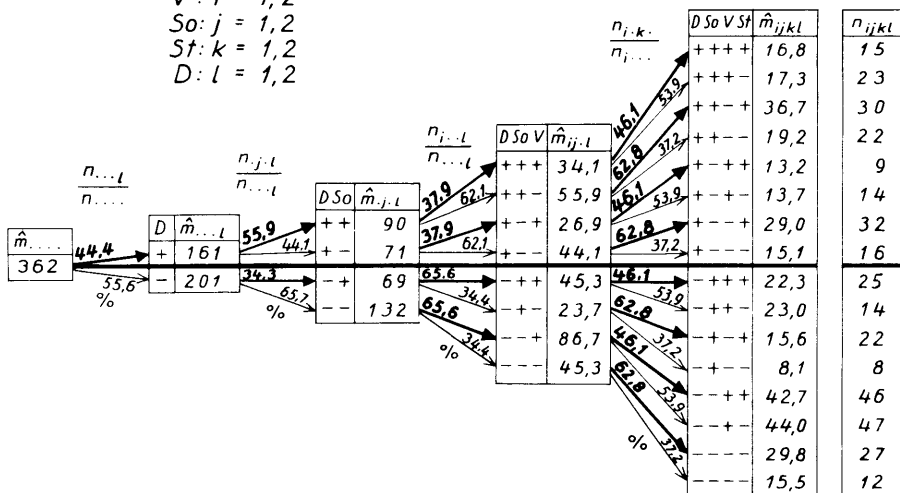


Abb. 23: Beobachtete und für Modell 24/14/13 erwartete Fallzahlen für vier Symptome bei 362 psychiatrisch behandelten Probanden.

Schließlich wurden häufiger energiegeladene extrovertierte (62,8%) als energiegeladene, introvertierte Patienten (46,1%) beobachtet.

Die einzelnen Schritte der Modellsuche sind in Tabelle 7 angegeben. Zunächst wird das Variablenpaar (2,3) als bedingt unabhängiges Paar ausgewählt. Die zugehörige Chi-Quadrat-Prüfgröße wird folgendermaßen berechnet:

Tabelle 7: Auswahlsschritte bei der Modellsuche für die Symptome depressiver Patienten

Variablen- paar	Schritt 1		Schritt 2		Schritt 3		Schritt 4	
	LQ- χ^2	FC	Rand- tafel	LQ- χ^2	FC	Rand- tafel	LQ- χ^2	FC
(1,2)	4,78	4	124	5,49	2	124	5,49	2
(1,3)	12,87	4	134	13,58	2	13	10,02	1
(1,4)	33,00	8	-*)	-	-	124	30,80	2
(2,3)	3,93	4	x*)	x	x	x	x	x
(2,4)	22,38	4	124	19,73	2	124	19,73	2
(3,4)	7,64	4	134	4,99	2	x	x	x
ausgewähl- tes Modell	124/134			124/13			13/14/24	
								3/14/24

- bedeutet, daß das zugehörige Modell nicht multiplikativ ist

x bedeutet, daß das zugehörige Variablenpaar in einem vorhergehenden Schritt ausgewählt wurde, bedingt unabhängig zu sein.

$$3,93 = 2 \left[\left(\sum n_{ijkl} \ln n_{ijkl} \right) - \left(\sum n_{ij.1} \ln n_{ij.1} \right) + \left(\sum n_{i.k1} \ln n_{i.k1} \right) - \left(\sum n_{i..1} \ln n_{i..1} \right) \right]$$

Dabei bezeichnen n_{ijkl} - wie in Kapitel 2.2 - die beobachteten Fallzahlen der vierdimensionalen Kontingenztafel, und $n_{ij.1}$, $n_{i.k1}$, $n_{i..1}$ die beobachteten Randtafeln mit den Variablen (124), (134) und (14), respektive. Wird die Zahl der Ausprägungen pro Variable wieder mit I_1, I_2, I_3, I_4 bezeichnet, so errechnet man die Freiheitsgrade der Prüfgrößen für die bedingte Unabhängigkeit des Paares (2,3) in der Tafel (1234) als $(I_2-1)(I_3-1)I_1I_4$ (= 4 in unserem Beispiel).

Da $3,93 < \chi^2_{.95;4}$ ist, wird Modell 124/134 akzeptiert. Für die Berechnung der Prüfgrößen im zweiten Auswahlschritt genügen infolgedessen die Randtafeln mit den Variablen (124) oder (134). (Da Modell 124/134 bereits angenommen wurde, wird z.B. der Test für die bedingte Unabhängigkeit des Paares (1,2), gegeben die Variablen 3 und 4, gleichbedeutend mit dem Test der bedingten Unabhängigkeit von (1,2), gegeben Variable 4 alleine). So errechnet man:

$$5,49 = 2 \left[\left(\sum n_{ij.1} \ln n_{ij.1} \right) - \left(\sum n_{i..1} \ln n_{i..1} \right) + \left(\sum n_{.j.1} \ln n_{.j.1} \right) - \left(\sum n_{...1} \ln n_{...1} \right) \right].$$

Die Zahl der Freiheitsgrade für diese Prüfgröße ist $(I_1-1)(I_2-1)I_4 = 2$. Vom vierten Auswahlschritt an wird die Anpassung der Modelle an die Daten schlecht: der kleinste Chi-Quadrat-Wert des vierten Schrittes ist 10,02. Verglichen mit $\chi^2_{.99;1} = 6,31$ ist dieser Wert hochsignifikant. Infolgedessen wird das im dritten Schritt ausgewählte Modell 13/14/24 als die einfachste, mit den Daten noch gut vereinbare Struktur angenommen. Hätten wir dieses Modell nicht schrittweise, sondern direkt überprüft, so hätte sich als Chi-Quadrat-Prüfgröße genau die Summe der Chi-Quadrat-Werte der einzelnen Auswahlritte, also 14,41 (= 3,93 + 4,99 + 5,41) mit 8 (= 4 + 2 + 2) Freiheitsgraden ergeben.

3.2.3 Alternativverfahren

Für qualitative Daten sind uns keine Verfahren bekannt, die als Alternativen zu der gerade beschriebenen Modellsuche verwandt werden könnten. Für quantitative Variable könnte die Suche nach Zusammenhangsstrukturen auch mit Hilfe einer Faktorenanalyse angegangen werden. Die Faktorenanalyse hat gegenüber der hier dargestellten Anwendung der Kovarianzselektion einige Vorzüge und Nachteile. Vorzüge der Faktorenanalyse sind vor allem, daß sie schon lange bekannt ist, häufig angewandt wurde und daß es für sie bereits gut ausgearbeitete Rechenverfahren gibt. Ihr wesentlicher Nachteil ist dagegen, daß sie nicht auf einer klar formulierten mathematisch-statistischen Theorie basiert und daß sich infolgedessen eine gefundene Struktur nicht als überprüfbare Hypothese formulieren läßt. Für die Modellsuche mittels Kovarianzselektion gilt das Gegenteil: es sind mit diesem Verfahren bisher - außer den oben dargestellten - noch keine praktischen Erfahrungen gesammelt worden. Dagegen ist die zugrundeliegende Theorie klar und eindeutig; die möglichen Modelle oder Strukturen sind genau definiert.

Über die Beziehungen zwischen Faktorenanalyse und Kovarianzselektion ist noch wenig bekannt. Einige Aufschlüsse geben die in Abbildung 24 dargestellten numerischen Beispiele für Kovarianzselektionsmodelle und die zugehörigen Faktorenanalysen. Zunächst wurden die Korrelationsmatrizen so konstruiert, daß sie jeweils ein Zahlenbeispiel für ein bestimmtes Kovarianzselektionsmodell darstellen. Wir wollen feststellen, ob und wie diese Strukturen in den Ergebnissen von Faktorenanalysen zum Ausdruck kommen. Die für die Faktorenanalyse benötigten Kommunalitäten wurden der Einfachheit halber mit den größten Korrelationskoeffizienten jeder Spalte der Korrelationsmatrix geschätzt. Wir vernachlässigten weiterhin die Schwierigkeit, daß die so gewonnenen neuen Matrizen nicht mehr positiv definit sind. Die Zahl der Faktoren wurde vorgegeben, und zwar als die Anzahl der im Kovarianzselektionsmodell als getrennt genannten Variablengruppen.

Modell	Numerisches Beispiel		Faktorenanalyse-Ergebnisse				
	Korrelationen	Variablen	Kommunalitätsschätzungen	Eigenwerte	Rotierte Faktorladungen		
					1	2	3
1 2 3 4		1	.5	2.000	.707		
		2	.5	.000	.707		
		3	.5	.000	.707		
		4	.5	.000	.707		
1 2 3 / 1 2 4		1	.5	1.920	.510	-.510	
		2	.5	.167	.510	-.510	
		3	.5	.000	.265	-.673	
		4	.5	-.087	.673	.265	
1 2 3 / 1 4		1	.5	1.768	.545	-.522	
		2	.5	.337	.683	-.202	
		3	.5	.000	.683	-.202	
		4	.5	-.105	.177	-.700	
1 2 3 / 4		1	.5	1.500	.707		
		2	.5	.000	.707		
		3	.5	.000	.707		
		4	.0	.000	.000		
1 3 / 1 4 / 2 3		1	.5	1.586	.266	.648	.234
		2	.5	.500	.673	.093	.198
		3	.5	.039	.500	.284	.649
		4	.5	-.125	.026	.702	.087
1 2 / 1 3 / 1 4		1	.5	1.651	.517	-.457	.349
		2	.5	.250	.196	-.681	.126
		3	.5	.250	.230	-.168	.827
		4	.5	-.151	.611	-.174	.162
1 4 / 2 3		1	.5	1.000	.000	.707	
		2	.5	1.000	.707	.000	
		3	.5	.000	.707	.000	
		4	.5	.000	.000	.707	

Abb. 24: Beispiele einfacher Strukturtypen und die zugehörigen Ergebnisse von Faktorenanalysen.

Betrachten wir nunmehr Abbildung 24. Die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Faktorenanalyse und unseren Modellbezeichnungen ist auffällig: So ist die erste Korrelationsmatrix ein Beispiel für Modell 1234, das heißt, es gibt keine bedingt unabhängigen Variablenpaare. Dementsprechend findet man mit der Faktorenanalyse dafür nur einen Generalfaktor. Die zweite Korrelationsmatrix ist ein Beispiel für Modell 123/124. Für diese Daten findet die Faktorenanalyse zwei Faktoren mit Doppelladungen für die Variablen 1 und 2 und getrennten Ladungen für die Variablen 3 und 4. Die Interpretation des zugehörigen Modells 123/124 ist völlig analog dazu: gegeben die gemeinsame Variable 12 sind die Variablen 3 und 4 unabhängig. Ähnlich deutlich sind die Relationen in den weiteren Beispielen. Die gefundenen Übereinstimmungen sind so gut, daß eine systematische Untersuchung der Beziehungen zwischen Kovarianzselektion und Faktorenanalyse lohnend erscheint.

3.3 Prüfung vorgegebener Hypothesen über Zusammenhangsstrukturen

Im vorhergehenden Kapitel wurden datengesteuerte Analysen beschrieben, im folgenden geben wir Beispiele für hypothesengesteuerte Analysen. Wir betrachten vorgegebene Unabhängigkeitshypothesen über Variablengruppen. Solche Hypothesen sind keineswegs neu, jedoch ist kaum bekannt, daß und wie einfach sie im Rahmen der Theorie der log-linearen Modelle und der Kovarianzselektionsmodelle überprüft werden können. Nun werden die meisten statistischen Verfahren erfahrungsgemäß immer dann gerne und häufig angewendet, wenn die erforderlichen Rechenschritte leicht nachvollziehbar sind, beziehungsweise wenn programmierte Rechenverfahren verfüg-

bar sind. Da bisher weder das eine noch das andere für die beiden oben beschriebenen Theorien zutrifft, verwundert es nicht, daß Hypothesen über Zusammenhangsstrukturen bisher selten formuliert und geprüft wurden.

3.3.1 Methodik

Jeder Unabhängigkeitshypothese für mehrere Variable entspricht ein bestimmtes multiplikatives Modell. Die Berechnung von Prüfgrößen und Schätzwerten für solche Modelle wurde bereits in Kapitel 2 ausführlich beschrieben, und zwar für normalverteilte und für multinomial verteilte Variable. Die Schwierigkeit bei der Anwendung solcher Prüfverfahren besteht also lediglich noch darin, die jeweilige sachliche Fragestellung in eine statistisch überprüfbare Frage zu übersetzen, also als eine entsprechende Unabhängigkeitshypothese zu formulieren, beziehungsweise das zugehörige multiplikative Modell zu finden. Nun wurde die Verschiedenartigkeit der möglichen Unabhängigkeitshypothesen bereits durch die Ergebnisse der Modellsuche (Kap. 3.2) und die systematische Darstellung der bei nur vier Variablen möglichen Modellarten (2.3) angedeutet. Daher wäre es wenig sinnvoll, eine vollständige Übersicht für alle Modellarten zu geben. Stattdessen versuchen wir, die Modelle zu systematisieren. Dies erleichtert es im Einzelfall, die zu Unabhängigkeitshypothesen gehörigen Modellbezeichnungen zu finden und die Prüfgrößen anzugeben. Wir unterscheiden Modelle mit:

- I - völliger Unabhängigkeit von Variablengruppen
- II- bedingten Unabhängigkeiten nur einzelner Variablen
- III-aus I und II gemischten Hypothesen.

Abbildung 25 zeigt anhand von verschiedenen Modellen für sechs Variable schematisch die für jede dieser drei Gruppen typischen Assoziationsmuster.

Modell- bezeichnung	Korrelationen																																																																																																			
	marginal	partial																																																																																																		
Unabhängige Variablengruppen																																																																																																				
1234/56	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td></tr> </table>		1	2	3	4	5	6	1	X						2	X	X					3	X	X	X				4	X	X	X	X			5					X		6						X	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td><td>-</td></tr> </table>		1	2	3	4	5	6	1	-						2	-	-					3	-	-	-				4	-	-	-	-			5	X	X	X	X	-		6	X	X	X	X	-	-
		1	2	3	4	5	6																																																																																													
1	X																																																																																																			
2	X	X																																																																																																		
3	X	X	X																																																																																																	
4	X	X	X	X																																																																																																
5					X																																																																																															
6						X																																																																																														
	1	2	3	4	5	6																																																																																														
1	-																																																																																																			
2	-	-																																																																																																		
3	-	-	-																																																																																																	
4	-	-	-	-																																																																																																
5	X	X	X	X	-																																																																																															
6	X	X	X	X	-	-																																																																																														
12/345/6	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr> </table>		1	2	3	4	5	6	1	X						2	X	X					3			X				4			X	X			5			X	X	X		6			X	X	X	X	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td></tr> </table>		1	2	3	4	5	6	1	-						2	-	-					3	X	X	-				4	X	X	-	-			5	X	X	-	-	-		6	X	X	X	X	X	-
		1	2	3	4	5	6																																																																																													
1	X																																																																																																			
2	X	X																																																																																																		
3			X																																																																																																	
4			X	X																																																																																																
5			X	X	X																																																																																															
6			X	X	X	X																																																																																														
	1	2	3	4	5	6																																																																																														
1	-																																																																																																			
2	-	-																																																																																																		
3	X	X	-																																																																																																	
4	X	X	-	-																																																																																																
5	X	X	-	-	-																																																																																															
6	X	X	X	X	X	-																																																																																														
Mehrere bedingt unabhängige Variable																																																																																																				
12/13/14/15/16	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr> </table>		1	2	3	4	5	6	1	X						2	X	X					3	X	X	X				4	X	X	X	X			5	X	X	X	X	X		6	X	X	X	X	X	X	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>X</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>-</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>-</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td></tr> </table>		1	2	3	4	5	6	1	-						2	-	-					3	-	X	-				4	-	X	X	-			5	-	X	X	X	-		6	-	X	X	X	X	-
		1	2	3	4	5	6																																																																																													
1	X																																																																																																			
2	X	X																																																																																																		
3	X	X	X																																																																																																	
4	X	X	X	X																																																																																																
5	X	X	X	X	X																																																																																															
6	X	X	X	X	X	X																																																																																														
	1	2	3	4	5	6																																																																																														
1	-																																																																																																			
2	-	-																																																																																																		
3	-	X	-																																																																																																	
4	-	X	X	-																																																																																																
5	-	X	X	X	-																																																																																															
6	-	X	X	X	X	-																																																																																														
123/124/125/126	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr> </table>		1	2	3	4	5	6	1	X						2	X	X					3	X	X	X				4	X	X	X	X			5	X	X	X	X	X		6	X	X	X	X	X	X	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>-</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>-</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td></tr> </table>		1	2	3	4	5	6	1	-						2	-	-					3	-	-	-				4	-	X	X	-			5	-	X	X	X	-		6	-	X	X	X	X	-
		1	2	3	4	5	6																																																																																													
1	X																																																																																																			
2	X	X																																																																																																		
3	X	X	X																																																																																																	
4	X	X	X	X																																																																																																
5	X	X	X	X	X																																																																																															
6	X	X	X	X	X	X																																																																																														
	1	2	3	4	5	6																																																																																														
1	-																																																																																																			
2	-	-																																																																																																		
3	-	-	-																																																																																																	
4	-	X	X	-																																																																																																
5	-	X	X	X	-																																																																																															
6	-	X	X	X	X	-																																																																																														
Mischtypen																																																																																																				
1234/156	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr> </table>		1	2	3	4	5	6	1	X						2	X	X					3	X	X	X				4	X	X	X	X			5	X	X	X	X	X		6	X	X	X	X	X	X	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>-</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>-</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td></tr> </table>		1	2	3	4	5	6	1	-						2	-	-					3	-	-	-				4	-	-	-	-			5	-	X	X	X	-		6	-	X	X	X	X	-
		1	2	3	4	5	6																																																																																													
1	X																																																																																																			
2	X	X																																																																																																		
3	X	X	X																																																																																																	
4	X	X	X	X																																																																																																
5	X	X	X	X	X																																																																																															
6	X	X	X	X	X	X																																																																																														
	1	2	3	4	5	6																																																																																														
1	-																																																																																																			
2	-	-																																																																																																		
3	-	-	-																																																																																																	
4	-	-	-	-																																																																																																
5	-	X	X	X	-																																																																																															
6	-	X	X	X	X	-																																																																																														
12/13/14/56	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr> </table>		1	2	3	4	5	6	1	X						2	X	X					3	X	X	X				4	X	X	X	X			5	X	X	X	X	X		6	X	X	X	X	X	X	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>-</td><td>X</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>-</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>-</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>-</td></tr> </table>		1	2	3	4	5	6	1	-						2	-	-					3	-	X	-				4	-	X	X	-			5	-	X	X	X	-		6	-	X	X	X	X	-
		1	2	3	4	5	6																																																																																													
1	X																																																																																																			
2	X	X																																																																																																		
3	X	X	X																																																																																																	
4	X	X	X	X																																																																																																
5	X	X	X	X	X																																																																																															
6	X	X	X	X	X	X																																																																																														
	1	2	3	4	5	6																																																																																														
1	-																																																																																																			
2	-	-																																																																																																		
3	-	X	-																																																																																																	
4	-	X	X	-																																																																																																
5	-	X	X	X	-																																																																																															
6	-	X	X	X	X	-																																																																																														

X Im Modell als bekannt vorgegebene Korrelationen

- Implizierte Korrelationen, die sich aus den vorgegebenen Korrelationen errechnen lassen

Abb. 25: Schematische Darstellung ausgewählter Modelle, die für drei Strukturgruppen typisch sind.

3.3.2 Anwendungsbeispiele

Anhand mehrerer Beispiele wird nunmehr gezeigt, daß medizinisch relevante Fragestellungen den verschiedenen Unabhängigkeitshypothesen (I-III) entsprechen können, daß die für die Prüfung erforderlichen Berechnungen einfach sind und daß die Ergebnisse sich **relativ anschaulich darstellen lassen.**

3.3.2.1 Völlige Unabhängigkeit von Variablengruppen (I)

Die Daten für das zur Erläuterung des Falles (I) beschriebene Beispiel wurden von K. Überla (1967) übernommen. Von 150 männlichen Versuchspersonen lagen Messungen über Kreislaufveränderungen vor, die durch eine Blutentnahme von 400 ml bewirkt wurden, außerdem Angaben über das Alter (Variable 1), die Körpergröße (2) und das Gewicht (3). Die Änderung in der Kreislaufregulation wurde als Abnahme des systolischen Blutdrucks (4), als Abnahme des diastolischen Blutdrucks (5) sowie als Änderung der Herzfrequenz (6) gemessen. Die beobachteten Interkorrelationen dieser sechs Variablen sind in Abbildung 26 wiedergegeben.

Es soll geprüft werden, ob es für die Zusammenhangsbetrachtung der Kreislaufveränderungen nötig ist, die Anamnese-faktoren zu berücksichtigen. Die einfachste Hypothese, die dieser Fragestellung entspricht, ist die, daß die Variablengruppe (123) völlig unabhängig von der Variablengruppe (456) sei, beziehungsweise, daß Modell 123/456 den Zusammenhang der sechs Variablen beschreibe. Diese Hypothese kann nicht widerlegt werden, da die Prüfgröße die 5%-Signifikanzschwelle nicht überschreitet, weil $10,49$, der beobachtete χ^2 -Wert kleiner ist als $\chi^2_{.95;9} = 16,9$. Damit wird die Ausgangsfrage verneint.

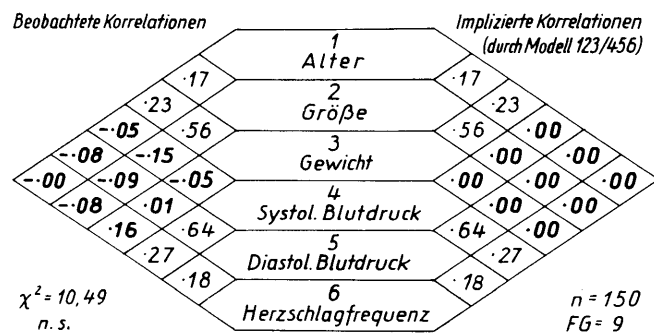


Abb. 26: Beobachtete und durch Modell 123/456 implizierte Korrelationen von Anamnesefaktoren (1,2,3) und Blutdruck- und Herzfrequenzänderungen (4,5,6)

Die Zahl der Freiheitsgrade ist dabei gleich neun, gleich der Zahl der in Modell 123/456 bedingt unabhängigen Variablenpaare. Der Wert der Prüfgröße errechnet sich folgendermaßen:

$$10,49 = -150 (\ln D_{123456} - (\ln D_{123} + \ln D_{456})),$$

also aus Differenzen von logarithmierten Determinanten, und zwar derjenigen der beobachteten Korrelationsmatrix (D_{12345}) einerseits und derjenigen der geschätzten Korrelationsmatrix \hat{D} ($= D_{123} D_{456}$) andererseits.

3.3.2.2 Bedingte Unabhängigkeit einzelner Variablen (II)

Um die etwas komplizierteren bedingten Unabhängigkeits-hypothesen der Gruppe (II) zu veranschaulichen, geben wir Beispiele mit quantitativen und mit qualitativen Variablen.

a) Quantitative Variable

Im Rahmen des Projektes Angiologie des SFB 36 wurden an 112 Probanden unter anderem die Pulswellenlaufzeit, die Pulswellengipfelzeit und Abfallzeit sowohl an Oberarm (Variable 1,2,3) wie am Unterarm (Variable 4,5,6) gemessen*. Abb. 27 zeigt die **Häufigkeitsverteilungen dieser sechs Variablen**. Diese zeigen, daß die sechs Variablen als annähernd normalverteilt gelten können. Gefragt wird, ob sich die beobachteten Zusammenhänge der drei Meßgrößen am Oberarm bereits mit den Messungen derselben Größen am Unterarm erklären lassen. Als Unabhängigkeitshypothese formuliert, lautet die gleiche Frage: gegeben die Variablen 4, 5 und 6, sind dann die Variablen 1, 2 und 3 unabhängig voneinander? Das entsprechende multiplikative Modell wird mit 1456/2456/3456 bezeichnet. Aus Abbildung 28 ist zu ersehen, wie wenig die beobachteten Korrelationen von den (unter diesen Modellannahmen) geschätzten Korrelationen abweichen. Dementsprechend fällt die Beurteilung anhand der Prüfgröße aus: die Hypothese kann nicht widerlegt werden, da die Prüfgröße kleiner als $\chi^2_{.95;3} = 7,81$ ist. Eine kausale Interpretation dieser Zusammenhänge wird in Kap. 3.3.3 vorgeschlagen.

b) Qualitative Daten

Krankheitssymptome werden meist als qualitative Variable erfaßt (vorhanden - nicht vorhanden). Daß die Unabhängigkeitsprüfung für Symptome zu Hypothesen der Gruppe II führen kann, wird nun gezeigt. Von Krankheitssymptomen sagt man,

Die Daten wurden freundlicherweise von E. Foltin und A. von Ungern-Sternberg zur Verfügung gestellt.

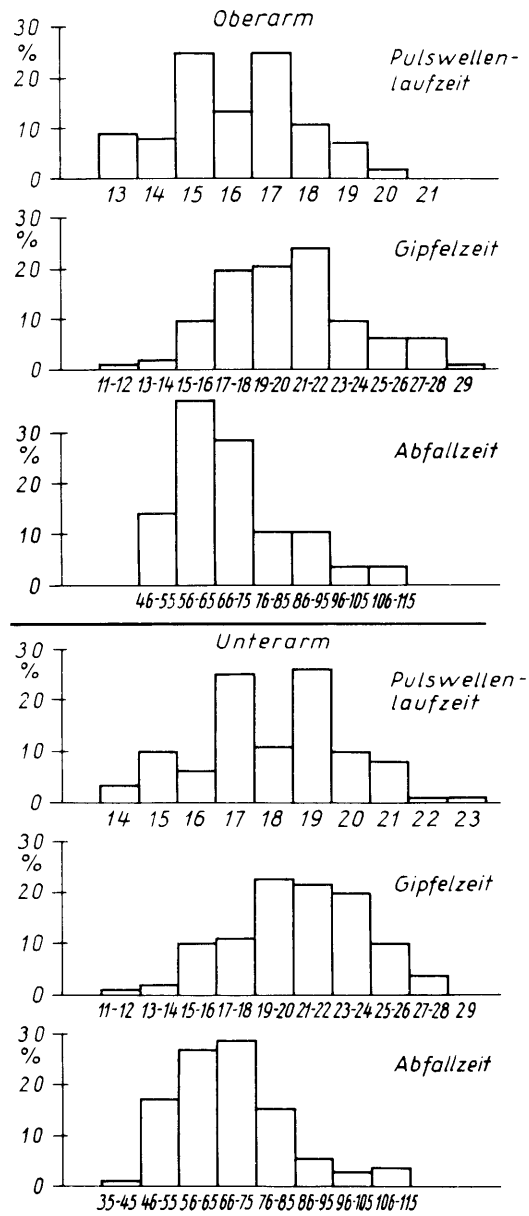


Abb. 27: Beobachtete Häufigkeitsverteilungen von sechs oszillographischen Messungen an 12 Probanden (in 10^{-2} sec)

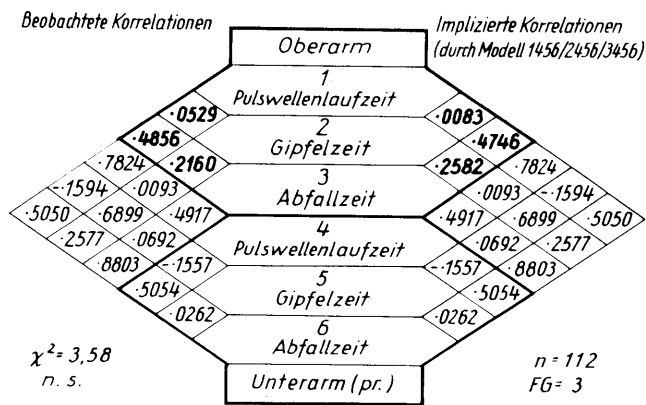


Abb. 28: Beobachtete und durch Modell 1456/2456/3456 implizierte Korrelationen oszillographischer Messungen am Oberarm (1,2,3) und am proximalen Abschnitt des Unterarms (4,5,6)

daß sie zusammengehörig seien (B. Leiber u.a., 1972), wenn sie Symptome eines Syndroms darstellen. Im Rahmen von multiplikativen Modellen kann man die Zusammengehörigkeit von Symptomen überprüfen, indem man die bedingte Unabhängigkeit eines jeden Symptompaars untersucht. Wir geben dafür zwei Beispiele.

b₁) Gestosesymptome

Als Gestosezeichen gelten Ödeme (1+), Proteinurie (Eiweiß im Urin, 2+) und erhöhter Blutdruck (3+). Aus der bereits erwähnten Studie über den Schwangerschaftsverlauf ist für 4.556 Schwangere bekannt, ob und welche dieser Symptome im letzten Drittel der Schwangerschaft, also im dritten Trimenon festgestellt wurden. Wie häufig die einzelnen Symptomkombinationen beobachtet wurden, ist in Tabelle 8 dargestellt.

Es wird geprüft, ob eines der drei Symptompaare bedingt unabhängig ist.

Tab. 8: Gestose-Symptome bei 4.856 Schwangeren

		Erhöhter Blutdruck (3)			
		+		-	
		Proteinurie (2)		Proteinurie (2)	
		+	-	+	-
Ödeme (1)	+	19	63	61	1051
	-	12	83	115	3452

Die drei Unabhängigkeitshypothesen sowie die Prüfergebnisse sind:

Modell	$LQ-\chi^2$	FG	
12/13	40,58	2	$\chi^2_{.99;2} = 9,21$
12/23	34,47	2	$\chi^2_{.997;2} = 12,00$
13/23	14,41	2	

Da jede der drei Prüfgrößen signifikant ist, haben wir mittels log-linearer Modelle einen statistischen Nachweis über die Zusammengehörigkeit der Gestosesymptome erbracht. Dieser Nachweis wäre durch eine Betrachtung nur der zweidimensionalen Tabellen nicht möglich.

b₂) Leuner'sches Syndrom

Ein ähnliches Ergebnis erhalten wir im Falle der Symptome des Leuner'schen Syndroms. Das gleichzeitige Vorkommen von Affektivitätsbeeinflussung (1), Denkstörung (2) und Bewußtseinstäubung (3) nach der Einnahme von LSD (Lysergsäurediäthylamid) wird als Leuner'sches Syndrom bezeichnet. Die von der Zusammenhangsstruktur her hochinteressanten Versuchsergebnisse G.A. Lienerts (1971) mit 65 Personen sind in Tabelle 9 wiedergegeben.

Tab. 9 : Symptome nach LSD-Einnahme bei 65 Versuchspersonen

		Bewußtseinstörung (3)				
		+		-		
		Denkstörung (2)		Denkstörung (2)		
		+	-	+	-	
Affektivitäts- beeinflussung (1)	(1)	+	20 4	(1)	+	3 15
		-	1 12		-	10 0

Auch in diesem Beispiel wird die Zusammengehörigkeit der Symptome nachgewiesen, da jede der drei Unabhängigkeits-hypothesen abgelehnt werden muß:

Modell	LQ- χ^2	FG	
12/13	44,79	2	$\chi^2 .99; 2 = 9,21$
12/23	44,11	2	$\chi^2 .997; 2 = 12,00$
13/23	44,39	2	

In beiden Fällen, b_1 wie b_2 , erweist sich somit die Zusammengehörigkeit der Einzelsymptome als statistisch gesichert. Damit ist nicht die Frage beantwortet, wie die Symptome zusammenhängen. Es ist im Gegenteil leicht zu sehen, daß die Art der Symptominterkorrelation in beiden Beispielen völlig unterschiedlich ist. Die drei Gestosesymptompaaire sind marginal (im Gesamtkollektiv) abhängig, die drei Symptompaaire des Leuner'schen Syndroms sind **alle marginal** unabhängig. Die partiellen Assoziationen der Gestose-symptome sind gleichartig, der Zusammenhang der Symptome des Leuner'schen Syndroms dagegen ist in den Teilkollektiven unterschiedlich.

3.3.2.3 Mischtypen von Hypothesen (III)

Die komplizierteren der multiplikativen Modelle (III) sind durch Hypothesen gekennzeichnet, die sich als Mischungen der bisher beschriebenen Hypothesen I und II auffassen lassen. Typischerweise ergeben sich solche Modelle oder Hypothesen als Ergebnis einer datengesteuerten Modellsuche. So prüfen wir hier als Beispiel, ob das Modell, das in Kapitel 3.2.3 für den Zusammenhang von Persönlichkeitsmerkmalen bei gesunden Probanden gefunden wurde, auch für Hypertoniker angenommen werden kann.

Die Beobachtungen von Persönlichkeitsmerkmalen für insgesamt 168 Hypertoniker wurden ebenfalls von V. Hodapp und G. Weyer zur Verfügung gestellt. Die empirische Häufigkeitsverteilung dieser Merkmale ist in Abb. 29 dargestellt. In dieser Abbildung ist zu sehen, daß die Annahme normalverteilter Skalen im Falle der ersten Variablen (FPI1) kaum erfüllt ist.

Die Hypothese, daß Modell 13568/234679 den Zusammenhang der Persönlichkeitsmerkmale von Hypertonikern beschreibt, ist abzulehnen ($28,8 \chi^2_{.99;12} = 26,2$). Wenn man die Abweichungen zwischen beobachteten und geschätzten Korrelationen in Abb. 30 betrachtet, so fällt auf, daß insbesondere die Korrelationen zwischen den Merkmalen (1,2), (1,4) und (1,9) schlecht reproduziert werden. Das deutet darauf hin, daß sich die Gruppe der Hypertoniker von den gesunden Probanden vor allem in psychosomatischen Beschwerden bzw. Nervosität (1) unterscheidet, und zwar hinsichtlich der Abhängigkeit von Aggression (2), Erregbarkeit (4) und Offenheit (9).

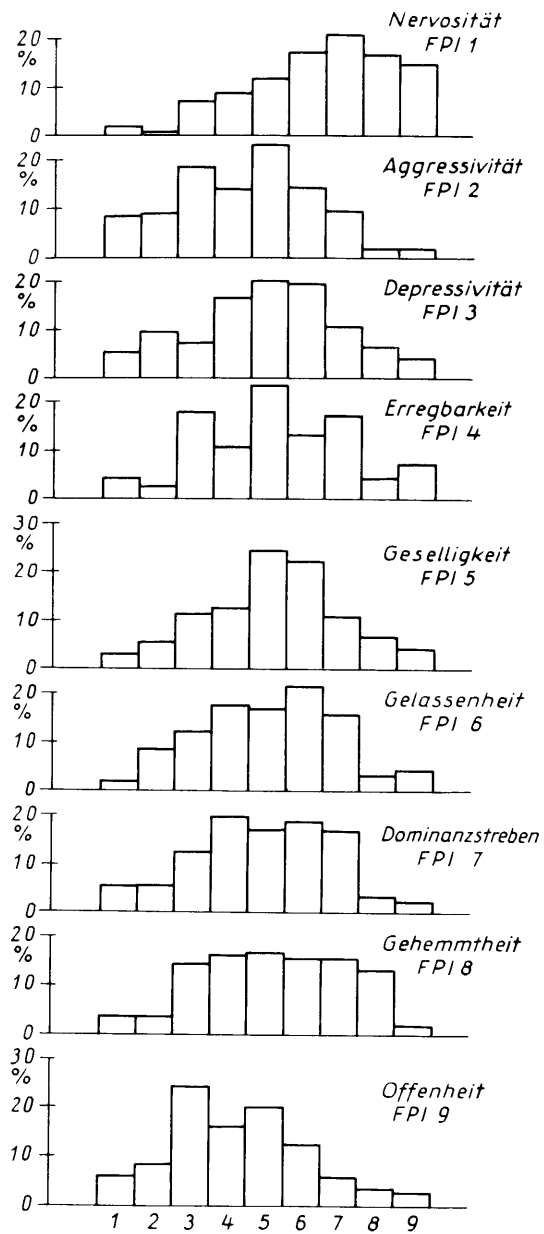


Abb. 29: Beobachtete Häufigkeitsverteilungen von neun Persönlichkeitsmerkmalen des Freiburger Persönlichkeitsinventars (FPI) für 168 wegen Hypertonie behandelten Probanden

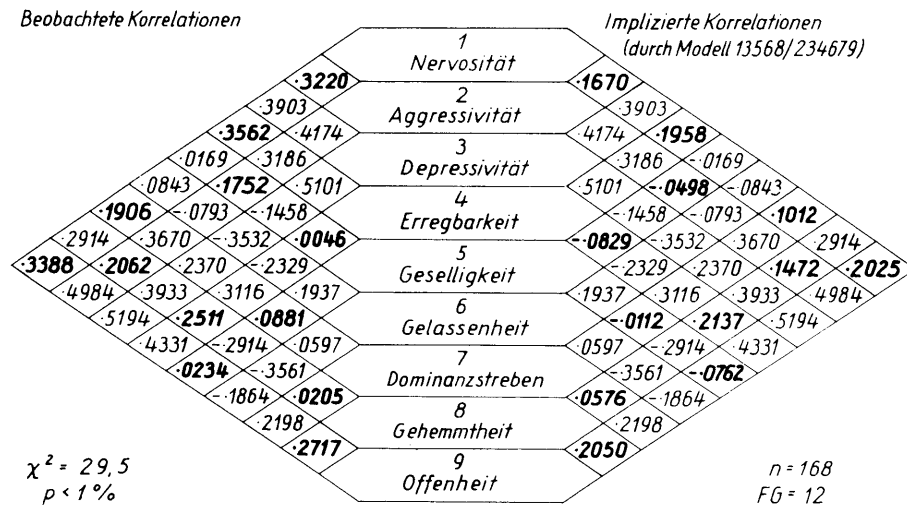


Abb. 30: Beobachtete und durch Modell 13568/234679 implizierte Korrelationen von neun Persönlichkeitsmerkmalen; für Hypertoniker

3.3.3 Alternativverfahren

Bei Alternativverfahren zu der in Kapitel 3.3.2 dargestellten Hypothesenprüfung kann man entweder an Verfeinerungen des geschilderten Vorgehens denken oder daran, daß sich die gleichen sachlichen Fragestellungen im Rahmen anderer statistischer Modellvorstellungen beantworten lassen. Als Verfeinerung kommt etwa folgendes in Betracht: es könnten andere Schätzprinzipien als die der Maximum-Likelihood-Schätzung verwendet werden; es könnten andere als die Likelihood-Quotienten-Prüfgrößen berechnet werden; oder die Prüfgrößen könnten anhand ihrer exakten Verteilung statt nur anhand ihrer asymptotischen Verteilung

beurteilt werden. Wir wollen jedoch im folgenden nicht darauf, sondern auf alternative Modelle eingehen. Logarithmisch-lineare wie auch Kovarianzselektionsmodelle erlauben es, Aussagen über die gemeinsame Verteilung zu machen, also über die Interdependenz mehrerer Variablen. Für einzelne Fragestellungen werden jedoch auch Modelle angebracht sein, die Aussagen über die konditionale Verteilung, d.h. die Dependenzbeziehung einer Variablen-Gruppe zu einer anderen Variablen-Gruppe enthalten.

3.3.3.1 Regressions- und Logitanalyse

Modelle, die Dependenzbeziehungen beschreiben, sind etwa die Logit-Modelle (vgl. J.E. Grizzle, 1971) für qualitative Variable, oder die Regressionsmodelle (vgl. A.P. Dempster, 1969) für quantitative Variable. Die Relationen zwischen Logit-Modellen und logarithmisch-linearen Modellen wurden von Y.M.M. Bishop (1969) diskutiert. Sie zeigte, daß sich für bestimmte Modelle die gleichen Schätzwerte ergeben, gleichgültig ob man sie im Rahmen einer Logitanalyse oder ob man sie im Rahmen eines logarithmisch-linearen Modells berechnet. Ähnliches gilt für die geschätzten Korrelationen einzelner Variablenpaare unter bestimmten Modellannahmen bei der Regression oder bei der Kovarianzselektion: In Kapitel 3.3.1 kennzeichneten wir als eine einfache Gruppe von Hypothesen diejenigen bei denen eine völlige Unabhängigkeit von verschiedenen Variablen-Gruppen angenommen wird. (Gruppe I). Alle Hypothesen dieser Art, die zwei normalverteilte Variablen-Gruppen betreffen, lassen sich mittels einer Regressionsanalyse prüfen. So wäre es in unserem Beispiel (Kapitel 3.3.2.1) über Kreislaufänderungen und Anamnesefaktoren naheliegend, zunächst die Kreislaufänderungen ($\underline{Y} = (\underline{X}_4, \underline{X}_5, \underline{X}_6)$) als von den Anamnesefaktoren ($\underline{X} = (\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3)$) abhängig zu sehen und dementsprechend die Regressionskoeffizienten zu berechnen, welche die Art dieser Abhängigkeit (\underline{Y} von \underline{X}) wiedergeben. Wenn sich

die Regressionskoeffizienten nicht wesentlich von Null unterscheiden, so kommt man zum gleichen Schluß wie mit der Kovarianzanalyse: zu der Aussage, daß die Anamnesefaktoren für die Interrelationen der Kreislaufveränderungen unerheblich sind.

3.3.3.2 Pfadkoeffizientenanalyse

Eine sinnvolle Anwendung für die Pfadkoeffizientenanalyse (S. Wright (1923, 1934), D. Duncan (1966)) bieten diejenigen Hypothesen, welche die bedingte Unabhängigkeit einzelner Variablen behaupten (Gruppe II). Die Regressionsanalyse und die Pfadkoeffizientenanalyse sind insofern verwandte Verfahren, als beide von einer Gleichung oder von Gleichungssystemen ausgehen, in denen jeweils die Abhängigkeit einer Variablen von weiteren Größen postuliert wird. So sind denn Pfadkoeffizienten nichts weiter als Regressionskoeffizienten für standardisierte Variable. Unter Standardisierung ist in diesem Zusammenhang zu verstehen, daß alle Variablen in vergleichbaren Einheiten gemessen werden: Man transformiert jede Beobachtung so, daß sie einen Mittelwert von Null und eine Streuung von Eins erhält.¹⁾

Wrights Gedanke war nun, daß sich strukturelle oder kausale Beziehungen zwischen mehreren Variablen in den Korrelationen widerspiegeln müssen. Er gab Regeln an, nach welchen die Pfadkoeffizienten und die Korrelationen, die durch ein System von sequentiellen Beziehungen impliziert werden, berechnet werden können. Weiterhin schlug er vor, die Abweichungen zwischen beobachteten und implizierten Korrelationen dazu zu verwenden, die Plausibilität der postulierten Beziehungen zu beurteilen. Zwei unterschiedliche Dinge sind somit mit der Pfadkoeffizientenanalyse beabsichtigt. Es sollen einerseits die Beziehungen der

einzelnen Variablen zueinander quantifiziert werden, indem man die Pfadkoeffizienten errechnet; andererseits soll anhand von implizierten Korrelationen beurteilt werden, ob die behaupteten Relationen mit den Beobachtungen vereinbar sind. Die erste Aufgabe deckt sich mit einer der Aufgaben einer Regressionsanalyse, die zweite geht über die Aufgaben einer Regressionsanalyse hinaus.

Nun ist bis heute nicht genau geklärt*, unter welchen Bedingungen die von S. Wright angegebenen Regeln eindeutig angewandt werden können. Das ist der größte Nachteil der Pfadkoeffizientenanalyse. Daß die Regeln sinnvolle Ergebnisse bringen können, zeigt jedoch das folgende Beispiel: In diesem Beispiel (wie für alle Modelle der Gruppe II) sind die implizierten Korrelationen, die man mittels einer Pfadkoeffizientenanalyse errechnet, identisch mit den implizierten Korrelationen, die sich für ein zugehöriges Kovarianzselektionsmodell ergeben.

Bei den oszillographischen Daten (Kapitel 3.3.2.2) interessierte, ob die Zusammenhänge zwischen Pulswellenlaufzeit (1), Gipfelzeit (2) und Abfallzeit (3) bereits reproduzierbar sind, wenn die entsprechenden Messungen am Unterarm (4,5,6) vorliegen. Diese Frage läßt sich in einem Pfaddiagramm so darstellen, daß direkte Pfade von den Variablen 4,5,6 zu jeder der Variablen 1,2 und 3 führen, daß aber die Variablen 1,2 und 3 nicht direkt miteinander verbunden sind. Abbildung 31 zeigt das Pfaddiagramm zusammen mit den geschätzten Pfadkoeffizienten.

*Relativ allgemeine Bedingungen wurden jüngst zusammengestellt (N. Wermuth, 1978)

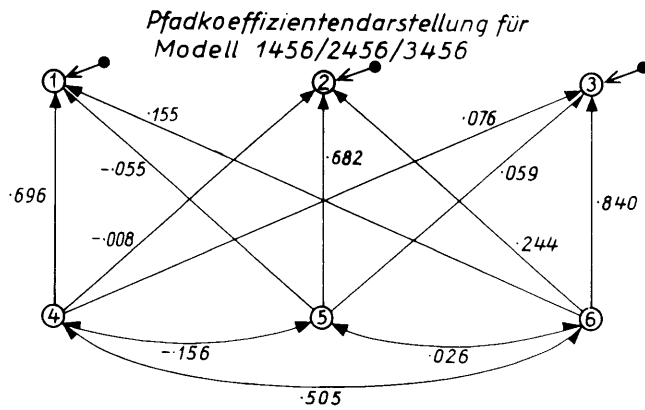


Abb. 31: Oszillographische Daten

Die Pfade mit nur einer Pfeilspitze kennzeichnen die direkten Pfade, deren Pfadkoeffizienten zu schätzen sind. Die Pfade mit zwei Pfeilspitzen repräsentieren ebenfalls direkte Pfade, deren Koeffizienten aber die beobachteten Korrelationen sind. Durch dieses System von Pfaden werden drei Korrelationen impliziert, die der Variablenpaare (1,2), (1,3) und (2,3). Wir zeigen nunmehr ausführlich, wie diese implizierten Korrelationen (r^*_{12} , r^*_{13} , r^*_{23}) und die Pfadkoeffizienten zu berechnen sind.

Die Gleichungen, die den in eine Richtung weisenden Pfaden entsprechen, schreiben wir als

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 &= p_{14}\tilde{V}_4 + p_{15}\tilde{V}_5 + p_{16}\tilde{V}_6 + \tilde{U}_1 \\ (27) \quad \tilde{V}_2 &= p_{24}\tilde{V}_4 + p_{25}\tilde{V}_5 + p_{26}\tilde{V}_6 + \tilde{U}_2 \\ \tilde{V}_3 &= p_{34}\tilde{V}_4 + p_{35}\tilde{V}_5 + p_{36}\tilde{V}_6 + \tilde{U}_3 \end{aligned}$$

\tilde{U}_1 kennzeichnet in diesem System zum Beispiel die Zufallsschwankungen, die nur mit \tilde{V}_1 korrelieren; p_{14} etwa, bezeichnet den Pfadkoeffizienten der von der Variablen \tilde{V}_4 nach \tilde{V}_1

führt. Jedes \tilde{V}_i ist ein $n \times 1$ -dimensionaler Vektor mit Beobachtungen für die standardisierte Variable. Mit dieser Symbolik läßt sich ein Korrelationskoeffizient, r_{ij} , als Vektorenprodukt $\tilde{V}_i^T \tilde{V}_j$ schreiben:

$$(28) \quad r_{ij} = \frac{\sum_1^{(n-1)} (x_{i1} - \bar{x}_i) (x_{j1} - \bar{x}_j)}{s_{ii}^{1/2} s_{jj}^{1/2}} = \tilde{V}_i^T \tilde{V}_j = \tilde{V}_j^T \tilde{V}_i$$

Die Schätzggleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält man, indem man jede Gleichung in (27) mit $\tilde{V}_4^T, \tilde{V}_5^T$ und \tilde{V}_6^T multipliziert. Dieser Regel folgend ergeben sich die aus der Regressionsanalyse bekannten Normalgleichungen, so etwa für p_{14}, p_{15}, p_{16} :

$$(29) \quad \begin{aligned} r_{14} &= \hat{p}_{14} + \hat{p}_{15} r_{45} + \hat{p}_{16} r_{46} \\ r_{15} &= \hat{p}_{14} r_{45} + \hat{p}_{15} + \hat{p}_{16} r_{56} \\ r_{16} &= \hat{p}_{14} + \hat{p}_{15} r_{56} + \hat{p}_{16} \end{aligned}$$

Die Darstellung kann durch Matrixschreibweise vereinfacht werden. Zu diesem Zweck teilen wir die beobachtete Korrelationsmatrix, \tilde{R} , folgendermaßen auf:

$$(30) \quad \tilde{R} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & r_{12} & r_{13} & R_{1k} \\ & 1 & r_{23} & R_{2k} \\ & & 1 & R_{3k} \\ \hline & & & R_{kk} \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}} \right\} 3 \\ \left. \vphantom{R_{kk}} \right\} 3 \end{array}$$

und schreiben die Pfadkoeffizienten als

$$(31) \quad \begin{aligned} \hat{\tilde{p}}_{1k} &= \hat{p}_{14} \quad \hat{p}_{15} \quad \hat{p}_{16} \\ \hat{\tilde{p}}_{2k} &= \hat{p}_{24} \quad \hat{p}_{25} \quad \hat{p}_{26} \\ \hat{\tilde{p}}_{3k} &= \hat{p}_{34} \quad \hat{p}_{35} \quad \hat{p}_{36} \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Normalgleichungen und die daraus geschätzten Pfadkoeffizienten folgendermaßen schreiben:

$$(32) \quad \begin{aligned} \tilde{R}_{1k} &= \hat{P}_{1k} \tilde{R}_{kk} & \hat{P}_{1k} &= \tilde{R}_{1k} \tilde{R}_{kk}^{-1} \\ \tilde{R}_{2k} &= \hat{P}_{2k} \tilde{R}_{kk} & \hat{P}_{2k} &= \tilde{R}_{2k} \tilde{R}_{kk}^{-1} \\ \tilde{R}_{3k} &= \hat{P}_{3k} \tilde{R}_{kk} & \hat{P}_{3k} &= \tilde{R}_{3k} \tilde{R}_{kk}^{-1} \end{aligned}$$

Nunmehr ist es einfach zu zeigen, daß die implizierten Korrelationen die folgenden Werte annehmen:

$$(33) \quad \begin{aligned} r^*_{12} &= \tilde{R}_{1k} \tilde{R}_{kk}^{-1} \tilde{R}_{2k} \\ r^*_{13} &= \tilde{R}_{1k} \tilde{R}_{kk}^{-1} \tilde{R}_{3k} \\ r^*_{23} &= \tilde{R}_{2k} \tilde{R}_{kk}^{-1} \tilde{R}_{3k} \end{aligned}$$

So ergibt sich r^*_{12} etwa aus der Multiplikation der ersten Gleichung in (27) mit \tilde{V}_2^T , oder aus der Multiplikation der zweiten Gleichung mit \tilde{V}_1^T :

$$\begin{aligned} (\tilde{V}_2^T \tilde{V}_1)^* &= P_{14} \tilde{V}_2^T \tilde{V}_4 + P_{15} \tilde{V}_2^T \tilde{V}_5 + P_{16} \tilde{V}_2^T \tilde{V}_6 \\ &= P_{14} r_{24} + P_{15} r_{25} + P_{16} r_{26} \\ &= \hat{P}_{1k} \tilde{R}_{2k} \end{aligned}$$

und durch das Schätzen von \hat{P}_{1k} als \hat{P}_{1k} . Es läßt sich nun anhand der Zahlen in den Abbildungen 31 und 28 leicht überprüfen, daß die so implizierten Korrelationen in unserem Beispiel mit denjenigen, die sich im Rahmen der Kovarianzselektion ergeben, übereinstimmen. Daß dies allgemein für Hypothesen der Gruppe II gilt, folgt aus Formeln, die an anderer Stelle (Wermuth 1975) angegeben wurden.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die implizierten Korrelationen, wie sie sich aus Pfadkoeffizienten und für bestimmte Kovarianzselektionsmodelle errechnen, übereinstimmen können. Im Rahmen der Pfadkoeffizientenanalyse

gibt es jedoch keinen objektiven Maßstab dafür, welches eine große Abweichung zwischen beobachteten und implizierten Korrelationen darstellt. Für Kovarianzselektionsmodelle dagegen erlaubt der Likelihoodquotiententest eine solche objektive Prüfung.

4. ZUSAMMENFASSUNG

Die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten multivariater statistischer Theorien für die Analyse medizinischer Daten wurden bisher selten beschrieben. In dieser Arbeit wurden daher zwei neuere Theorien herausgegriffen, und zwar diejenige der logarithmisch-linearen Modelle für multinomial-verteilte Größen und diejenige der Kovarianzselektion für normalverteilte Merkmale. Gemeinsam ist diesen beiden Theorien, daß sie dazu dienen, relativ einfache Zusammenhangsstrukturen für mehrere Variable zu beschreiben, die sogenannten multiplikativen oder auflösbaren Modelle.

Das Verständnis für die Beziehungen zwischen mehreren Größen wird erleichtert, wenn sich die Interrelationen als eine einfache Zusammenhangsstruktur darstellen lassen. Das Suchen nach einfachen Zusammenhangsstrukturen ist für das Verstehen ebenso wichtig wie die Bestätigung oder Widerlegung einer bestimmten Hypothese über Zusammenhänge. Eine solche Suche entspricht nur einem der Hypothesenprüfung vorgelagerten Stadium der Forschung. In beiden Stadien können die mathematisch-statistischen Theorien nutzbringend angewandt werden. Zur Betonung der unterschiedlichen Situationen sprachen wir entweder von datengesteuerten (exploratory) oder von hypothesengesteuerten (confirmative) Analysen.

Für diese Arbeit wurden Modellsuchverfahren für logarithmisch-lineare Modelle und für Kovarianzselektions-Modelle formuliert und programmiert. An verschiedenen Beispielen wurde veranschaulicht, wie die Verfahren anzuwenden sind und wie sich die Ergebnisse interpretieren lassen. Für die hypothesengesteuerten Analysen wurde einerseits ein Ansatz zur Systematik der möglichen Hypothesen gegeben, der es erleichtert, sachliche Fragestellungen in statistisch überprüfbare zu übersetzen; andererseits wurde eine Hypothesengruppe wegen ihrer Wichtigkeit gesondert dargestellt, nämlich diejenige zum Erkennen und Ausschalten der Wirkung von Störfaktoren. In beiden Fällen wurden Analysen anhand verschiedener Datenmengen durchgeführt.

Die Breite der möglichen Anwendungen der Theorie der logarithmisch-linearen Modelle und der Theorie der Kovarianzauswahl wurde durch eine Diskussion möglicher Alternativverfahren in den einzelnen Situationen angedeutet. Schwerpunktartig beschrieben wir kurz Paarbildung, Standardisieren, Faktorenanalyse, Regressions- und Logitanalyse, sowie die Pfadkoeffizientenanalyse.

Wir vermuten, daß die in dieser Arbeit beschriebenen einfachen Zusammenhangsstrukturen, die multiplikativen Modelle, in einigen Jahren das für mehrdimensionale Daten sein werden, was heute der Mittelwert für eine einfache, eindimensionale Beobachtungsreihe ist: der Mittelwert wird bei fast allen Datenbeschreibungen als erstes berechnet, er erfaßt gewöhnlich einen wesentlichen Aspekt einer Beobachtungsreihe und erleichtert das Verständnis - zusammen mit anderen Kennwerten - für ein an sich unübersichtliches Material.

5. Datenanhang

Die folgenden vier Tabellen enthalten die Originaldaten für die Analysen, die in Kap. 3.1. beschrieben wurden. Die Gesamtfallzahlen unterscheiden sich, weil bei einigen Fällen die gewünschten Beobachtungen nicht vorhanden sind: Angaben über Glukosurie im dritten Trimenon etwa, können nicht vorliegen, wenn die Schwangerschaft mit Abort endete. Zur Prüfung von Kliniksheterogenitäten wurden nur neun der insgesamt 21 Kliniken herangezogen, diejenigen mit relativ großen Fallzahlen. Bei der Prüfung der Anamnesefaktoren dagegen (bei den Daten in den letzten beiden Tabellen) gehen alle vorhandenen Beobachtungen ein.

Daten zu Abb. 7, 8 und 9

Klinik:	Bamberg	Berlin- Möabit	Berlin- Charlott.	Düsseldorf	Gießen	Hamb.- Finkenau	Hannover	Tübingen	Kiel									
Gluko- surie	Zahl der beobachteten Fälle																	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)								
	31	206	28	186	136	479	42	339	46	301	28	211	82	277	159	710	53	230
	keine	0	2	0	3	6	23	1	20	0	4	1	10	0	1	2	17	1
1. Trim.	0	6	2	9	36	102	1	11	3	11	2	10	0	0	13	51	3	11
2. Trim.	2	8	1	12	30	93	2	6	0	6	2	9	2	7	5	18	2	15
3. Trim.	Zahl der erwarteten Fälle bei gleichartiger Assoziation in den Teiltafeln																	
keine	30,43	206	27,19	186	139,27	479	43,03	339	45,59	301	29,11	211	81,58	277	158,57	710	51,28	230
1. Trim.	0,18	2	0,26	3	4,28	23	1,46	20	0,36	4	0,82	10	0,19	1	2,35	17	1,10	8
2. Trim.	1,09	6	1,62	9	35,15	102	1,69	11	2,05	11	1,70	10	0,00	0	13,74	51	2,96	11
3. Trim.	1,30	8	1,93	12	29,30	93	0,82	6	1,00	6	1,37	9	2,23	7	4,39	18	3,65	15
Zahl der erwarteten Fälle bei Unabhängigkeit in den Teiltafeln																		
keine	30,62	206	27,46	186	142,94	479	41,47	339	45,80	301	29,01	211	81,64	277	159,66	710	51,40	230
1. Trim.	0,30	1	0,44	3	6,86	23	2,45	20	0,61	4	1,38	10	0,29	1	3,82	17	1,79	8
2. Trim.	0,89	6	1,33	9	30,44	102	1,33	11	1,61	11	1,38	10	0,00	0	11,47	51	2,46	11
3. Trim.	1,19	8	1,77	12	27,75	93	0,73	6	0,91	6	1,24	9	2,06	7	4,05	18	3,35	15
Zusammen	33	222	31	210	208	697	46	376	49	322	33	240	84	285	179	796	59	264

*Ausgliederung der Kinder mit Auffälligkeiten (Spalte (1)) aus der Gesamtzahl der Fälle (Spalte (2))

Daten zu Abb. 10, 11, 12

Klinik:	Bamberg	Berlin-Moabit	Berlin-Charlott.	Düsseldorf	Gießen	Hamburg-Finkenau	Hannover	Tübingen	Kiel										
										Zahl der beobachteten Fälle									
Dauer in Tagen	(1)*	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)									
≤ 250	8	19	6	10	16	49	17	46	6	19	7	20	2	10	26	57	12	16	
251-260	1	12	0	6	0	40	0	43	3	22	1	15	2	15	1	34	1	10	
261-270	0	26	1	38	0	99	0	56	0	40	2	37	1	43	1	93	1	30	
> 270	1	206	1	221	3	668	1	294	1	281	1	225	0	283	5	811	4	223	
Zahl der erwarteten Fälle bei gleichzeitiger Assoziation in den Teiltafeln																			
≤ 250	8,08	19	5,25	10	15,09	49	15,17	46	7,44	19	8,64	20	3,26	10	25,56	57	11,51	16	
251-260	0,58	12	0,42	6	1,18	40	1,40	43	0,93	22	0,74	15	0,48	15	1,79	34	1,49	10	
261-270	0,32	26	0,70	38	0,74	99	0,46	56	0,43	40	0,47	37	0,35	43	1,27	93	1,25	30	
> 270	1,02	206	1,63	221	1,99	668	0,97	294	1,21	281	1,14	225	0,91	283	4,39	811	3,76	223	
Zahl der erwarteten Fälle bei Unabhängigkeit in den Teiltafeln																			
≤ 250	0,72	19	0,29	10	1,09	49	1,89	46	0,52	19	0,74	20	0,14	10	1,89	57	1,03	16	
251-260	0,46	12	0,17	6	0,89	40	1,76	43	0,61	22	0,56	15	0,21	15	1,13	34	0,65	10	
261-270	0,99	26	1,11	38	2,20	99	2,30	56	1,10	40	1,37	37	0,61	43	3,08	93	1,94	30	
> 270	7,83	206	6,43	221	14,83	668	12,05	294	7,76	281	8,33	225	4,03	283	26,90	811	14,39	223	
Zusammen	10	263	8	275	19	856	18	439	10	362	11	297	5	351	33	995	18	279	

* Ausgliederung der Totgeburten (Spalte (1)) aus der Gesamtzahl der Geburten (Spalte (2))

Daten zu Abb. 13, 14

Zahl früherer Kinder	Ehe- dauer	Beschwerden	keine früheren Aborte		frühere Aborte		(1)	frühere (2)	Aborte (3)	(4)
			(1)	(2)	(3)	(4)				
0	< 2	nein	447	435,91	436,26	511	126	124,09	124,15	136
		ja	271	282,09	284,74	330	73	74,91	74,85	82
	2-4	nein	202	203,06	203,14	216	132	134,70	134,74	142
		ja	177	175,94	175,86	187	128	125,30	125,26	132
	> 4	nein	93	93,89	93,92	99	79	77,96	77,97	79
		ja	92	91,11	91,08	96	72	73,04	73,03	74
1	< 2	nein	99	103,79	104,03	204	30	30,22	30,26	42
		ja	55	50,21	49,97	98	19	18,78	18,74	26
	2-4	nein	338	342,44	342,79	435	105	117,54	117,65	145
		ja	175	170,56	170,21	216	80	67,46	67,35	83
	> 4	nein	169	173,97	174,18	216	170	164,53	164,64	186
		ja	135	130,03	129,82	161	92	97,47	97,36	110
≥ 2	< 2	nein	12	13,80	13,83	27	8	5,87	5,88	10
		ja	9	7,20	7,17	14	2	4,13	4,12	7
	2-4	nein	49	47,84	47,96	111	19	17,45	17,50	35
		ja	21	22,16	22,04	51	12	13,55	13,50	27
	> 4	nein	122	116,31	116,66	272	83	79,64	79,86	174
		ja	62	67,69	67,34	157	40	43,36	43,14	94

Ausgliederung der beobachteten Fallzahlen von erwünschtem Schwangerschaft (1); der bei gleichzeitiger Assoziation in den Teiltafeln erwarteten Fallzahlen (2) und der bei Unabhängigkeit in den Teiltafeln erwarteten Fallzahlen (3) aus der Gesamtzahl (4) der beobachteten Fälle.

Daten zu Abb. 15, 16

Zahl früherer Kinder	Ehe- dauer	Beschwerden	keine früheren Aborte				frühere Aborte			
			(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
0	< 2	nein	150	155,24	164,90	531	45	47,80	50,41	138
		ja	118	112,76	103,10	332	35	32,20	29,59	81
	2-4	nein	79	73,86	78,95	219	50	57,72	56,32	138
		ja	67	72,14	67,05	186	61	58,28	54,68	134
	> 4	nein	32	29,97	32,31	100	21	21,52	23,29	79
		ja	31	33,03	30,69	95	25	24,48	22,71	77
1	< 2	nein	71	71,16	74,54	212	17	15,12	15,97	43
		ja	38	37,84	34,46	98	9	10,88	10,03	27
	2-4	nein	185	186,02	194,14	453	66	62,14	65,05	152
		ja	106	104,98	96,86	226	35	38,86	35,95	84
	> 4	nein	90	94,66	99,81	225	64	66,36	67,97	191
		ja	83	78,34	73,19	165	47	44,64	41,03	112
≥ 2	< 2	nein	11	10,42	10,96	29	4	3,96	4,20	12
		ja	6	6,58	6,04	16	3	3,04	2,80	8
	2-4	nein	63	60,34	62,40	120	18	16,88	17,78	39
		ja	28	30,66	28,60	55	13	14,12	13,22	29
	> 4	nein	114	114,78	120,46	291	83	80,04	83,44	182
		ja	76	75,22	69,54	168	44	46,96	43,56	95

Ausgliederung der beobachteten Fallzahlen mit früher praktizierter Konzeptionsverhütung (1);
 der bei gleichzeitiger Assoziation in den Teiltafeln erwarteten Fallzahlen (2) und der bei
 Unabhängigkeit in den Teiltafeln erwarteten Fallzahlen (3) aus der Gesamtzahl (4) der be-
 obachteten Fälle.

LITERATURVERZEICHNIS

- Anderson, T.W.: An introduction to multivariate statistical analysis
Wiley, New York (1958)
- Anderson, T.W., Rubin, H.: Statistical inference in factor analysis
Third Berkeley Symposium on Math. and Statist. Probability 5 (1956)
- Armitage, P.: The chi-square test for heterogeneity of proportions after adjustment for stratification
J. Roy. Statist. Soc. B 28, 150-163 (1966)
- Bartlett, M.S.: Contingency table interaction
J. Roy. Statist. Soc. Suppl. 2, 248-252 (1935)
- Birch, M.W.: Maximum likelihood in three-way contingency tables
J. Roy. Statist. Soc. B 25, 220-233 (1963)
- Bishop, Y.M.M.: Multidimensional contingency tables, cell estimates
Ph.D. thesis, Department of Statistics, Harvard University, Cambridge (1967)
- Bishop, Y.M.M.: Full contingency tables, logits, and split contingency tables
Biometrics 25, 383-400 (1969)
- Bishop, Y.M.M.: Effects of collapsing multidimensional contingency tables
Biometrics 27, 545-562 (1971)
- Bishop, Y.M.M., Fienberg, S.E., Holland, P.W.: Discrete multivariate analysis. Theory and practice
M.I.T. Press, Cambridge (1975)
- Bishop, Y.M.M., Mosteller, F.: Smoothed contingency table analysis
The National Halothane Study, Eds. J.P. Bunkers et al. Natl. Inst. of Health, Bethesda 237-286 (1969)
- Bross, D.J.: The role of the statistician scientist or shoe clerk?
American Statistician, 126-127 (1974)
- Catell, R.B.: Factor analysis: an introduction to essentials. I. The purpose and underlying models
Biometrics 21, 190-215 (1965)

- Catell, R.B.: Factor analysis: an introduction to essentials. II.
The role of factor analysis in research
Biometrics 21, 405-435 (1965)
- Cochran, W.G.: The comparison of percentages in matched samples
Biometrika 37, 256-266 (1950)
- Cochran, W.G.: Some methods for strengthening the common
chi-square tests
Biometrics 10, 417-451 (1954)
- Cochran, W.G., Cox, G.M.: Experimental Designs
Wiley, New York (1957)
- Cochran, W.G.: The planning of observational studies of
human populations
J. Roy. Statist. Soc. A 128, 234-265 (1965)
- Cochran, W.G.: The effectiveness of adjustment by sub-
classification in removing bias in observational
studies
Biometrics 24, 295-313 (1968)
- Coppen, A.: The Mark-Nyman temperament scale: an English
translation
Brit. J. med. Psychol. 33, 55-59 (1966)
- Darroch, J.N.: Interactions in multi-factor contingency tables
J. Roy. Statist. Soc B 24, 251-263 (1974)
- Darroch, J.N.: Multiplicative and additive interaction
in contingency tables
Biometrika 61, 207-214 (1974)
- Darroch, J.N.: No-interaction in contingency tables
Invited paper, Proceedings of the 9'th Int.
Biometric Conference, Vol.I, Boston, 264-278 (1977)
- Deming, W.E., Stephan, F.F.: On a least squares adjust-
ment of a sampled frequency table when the
expected marginal totals are known
Ann. Math. Statist. 11, 427-444 (1940)
- Dempster, A.P.: Elements of continuous multivariate analysis
Addison-Wesley, Reading (1969)
- Dempster, A.P.: An overview of multivariate data analysis
Multivar. Anal. 1, 316-347 (1971)
- Dempster, A.P.: Covariance selection
Biometrics 28, 157-175 (1972)
- Dempster, A.P., Schatzoff, M., Wermuth, N.: A simulation
study of alternatives to least squares
J. Am. Statist. Assoc. 72, 77-105 (1977)

- Draper, N., Smith, H.: Applied Regression Analysis
Wiley, New York (1966)
- Duncan, O.D.: Path analysis: sociological examples
Am. J. Sociol. 72, 1-16 (1966)
- Dyke, G.V., Patterson, H.D.: Analysis of factorial
arrangements when the data are proportions
Biometrics 8, 1-12 (1952)
- Eysenck, H.J.: The structure of human personality
Methuen, New York (1960)
- Fahrenberg, J., Selg, H.: Das Freiburger Persönlichkeitsinventar
Hogrefe, Göttingen (1970)
- Fienberg, S.E.: An iterative procedure for estimation in
contingency tables
Ann. Math. Statist. 41, 907-917 (1970)
- Fisher, R.A.: Contributions to mathematical statistics
Wiley, New York (1950)
- Fisher, R.A.: Statistical methods for research workers
Oliver and Boyd, Edinburg, London (1958)
- Fleiss, J.: Statistical methods for rates and proportions
Wiley, New York (1973)
- Foltin, E.: Korrelationen angiologischer Variabler
Vortrag gehalten auf der 19. Jahrestagung der
G.M.D.S., Mainz (1974)
- Goldberger, A.S.: Econometric theory
Wiley, New York (1964)
- Goodman, L.A.: The multivariate analysis of qualitative
data: interactions among multiple classifications
J. Amer. Statist. Assoc. 65, 226-256 (1970)
- Goodman, L.A.: The analysis of multidimensional contingency
tables - stepwise procedures and direct estimation
methods for building models for multiple classi-
fications
Technometrics 13, 33-61 (1971)
- Goodman, L.A.: Guided and unguided methods for the selection
of models for a set of T multidimensional contin-
gency tables
J. Amer. Statist. Assoc. 68, 165-175 (1973)
- Goodman, L.A.: The analysis of multi-dimensional contingency
tables when some variables are posterior to
others: a modified path analysis approach
Biometrika 60, 179-192 (1973)
- Grizzle, J.E.: Multivariate logit analysis
Biometrics 27, 1057-1062 (1971)

- Grizzle, J.E., Starmer, C.F., Koch, G.G.: Analysis of categorical data by linear models
Biometrics 25, 489-504 (1969)
- Haberman, S.J.: Log-linear fit for contingency tables
J. Roy. Statist. Soc C Appl. Statist. 21, 218-225 (1974)
- Haberman, S.J.: The analysis of frequency data
Univ. of Chicago Press., Chicago (1974)
- Hauck, W.: A bibliography on causal inference
Research Report CP-1, Department of Statistics,
Harvard University, Cambridge (1970)
- Hotelling, H.: Analysis of a complex of statistical variables into principal components
J. Educ. Psychol. 24, 417-441, 498-520 (1933)
- Immich, H.: Assoziationen zwischen Reserpin-Medikation und Brustkrebs?
Deutsches Ärzteblatt 42, 2997-2999 (1974)
- Jesdinsky, H.: Beurteilung von drei Veröffentlichungen zum Thema "Zusammenhang zwischen Reserpineinnahme und Brustkrebs"
(vorgetragen in der Sitzung im Bundesgesundheitsamt, Berlin, 1.10.1974)
- Jick, H., Slone, D., Shapiro, S., Heinonen, O.P., Hartz, S.C.
Reserpine and Breast Cancer
The Lancet, 7881, 669-674 (1974)
- Kendall, M.G., Stuart, A.
The advanced theory of statistics. Vol 2
Griffin, London (1961)
- Killion, R.A., Zahn, D.A.: A bibliography of contingency table literature: 1900 to 1973
Int. Statist. Review 44, 71-112 (1976)
- Koller, S.: Typisierung korrelativer Zusammenhänge
Metrika 6, 65-75 (1963)
- Koller, S.: Systematik der statistischen Schlußfehler
Meth. Inform. Med. 3, 113-117 (1964)
- Koller, S.: Mögliche Aussagen bei Fragen der statistischen Ursachenforschung
Metrika 17, 30-42 (1971)
- Koller, S. et al.: Schwangerschaftsverlauf und Kindesentwicklung
Unveröffentlichter Zwischenbericht. Inst.f. Med. Stat. u. Dok., Mainz (1974)

- Ku, H.H., Varner, R., Kullback, S.: On the analysis of multidimensional contingency tables
J. Amer. Statist. Assoc. 66, 55-64 (1971)
- Lancaster, H.O.: The chi-squared distribution
Wiley, New York (1969)
- Lehmann, E.L.: Testing statistical hypothesis
Wiley, New York (1959)
- Leiber, B., Olbrich, G., Scheibe, G.: Die klinischen Syndrome
Urban-Schwarzenbeck, München (1972)
- Lienert, G.A.: Die Konfigurationsfrequenzanalyse I
Z. klin. Psych. Psychother. 19, 99-115 (1971)
- Mantel, N., Haenszel, W.: Statistical aspects of the analysis of data from retrospective studies of disease
J. Natl. Cancer Inst. 22, 719-748 (1959)
- Netter, P.: Funktionelle Beschwerden in der Schwangerschaft als Suchfaktoren für psychische Verhaltensmuster und klinische Befunde
Habilitationsschrift, Universität Mainz (1975)
- Netter, P., Wermuth, N.: Psychosomatic complaints as related to desire of pregnancy, contraceptive practice and frequency of intercourse
The Family 4th Int. Congr. of Psychosomatic Obstetrics and Gynecology, Tel Aviv 1974, Hrsg. Herman Hirsch, Karger, Basel, 189-196 (1975)
- Neyman, J., Pearson, E.S.: On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference
Biometrika 20 A 175-240, 263-294 (1928)
- Pawlik, K.: Dimensionen des Verhaltens
Huber, Bern (1968)
- Plackett, R.L.: The analysis of categorical data
Griffin, London (1974)
- Rao, C.R.: Sir Ronald Aylmer Fisher - the architect of multivariate analysis
Biometrics 20, 286-300 (1964)
- Rao, C.R.: Linear statistical inference and its applications
Wiley, New York (1965)
- Rao, C.R.: Recent trends of research work in multivariate analysis
Biometrics 28, 2-22 (1972)

- Roy, S.N., Kastenbaum, M.A.: On the hypothesis of 'no interaction' in a multi-way contingency table
Ann. Math. Statist. 27, 749-757 (1956)
- Rubin, D.B.: Matching to remove bias in observational studies
Biometrics 29, 159-184 (1973)
- Schicketanz, K.-H.: Korrelationsunterschiede in verschiedenen Personengruppen
Vortrag gehalten auf der 19. Jahrestagung der G.M.D.S. Mainz (1974)
- Schwentker, O.: Probability distribution package
Vervielfältigte Benutzungsanweisung, Inst. f. Med. Statist. u. Dok., Mainz (1970)
- Snedecor, G.W., Cochran, W.G.: Statistical methods
Iowa State University Press., Ames (1967)
- Tukey, J.W.: Exploratory data analysis (limited preliminary edition)
Addison-Wesley, Reading (1970)
- Überla, K.: Faktorenanalyse in der Medizin. Beiträge zur Methodik und Probleme der Anwendung
Habilitationsschrift, Medizinische Fakultät, Mainz (1967)
- Überla, K.: Faktorenanalyse
Springer, Heidelberg (1968)
- Victor, N.: Zur Klassifizierung mehrdimensionaler Kontingenztafeln
Biometrics 28, 427-431 (1972)
- Weber, E.: Einführung in die Faktorenanalyse
Fischer, Stuttgart (1974)
- Wermuth, N.: Beobachtungen zur Ridge-Regression
Jb. Natl. Ökon. Statist. 189, 300-307 (1975a)
- Wermuth, N.: Testing the differences between observed and implied correlations in some path analysis models
Bull. Int. Stat. Inst., 45, Book 4, 446-449 (1975b)
- Wermuth, N.: Analogies between multiplicative models in contingency tables and covariance selection
Biometrics 32, 95-108 (1976a)
- Wermuth, N.: Model search among multiplicative models
Biometrics 32, 253-263 (1976b)
- Wermuth, N.: Anmerkungen zur Konfigurationsfrequenzanalyse
Z. klin. Psych. Psychother. 24, 5-21 (1976c)

- Wermuth, N.: Das Zusammenwirken einiger Risikofaktoren in der Schwangerschaft
Meth. Inf. Med., 15, 251-259 (1976d)
- Wermuth, N.: Exploratory analyses of multidimensional contingency tables
Invited paper, Proceedings of the 9'th Int. Biometric conference, Vol. I, Boston, 279-295 (1976e)
- Wermuth, N.: Linear recursive equations, covariance selection and path analysis
Manuskript, zur Veröffentlichung eingereicht an J. Am. Statist. Assoc. (1978)
- Wermuth, N., Hodapp, V., Weyer, G.: Die Methode der Kovarianzselektion als Alternative zur Faktorenanalyse, untersucht an Persönlichkeitsmerkmalen
Z. Exp. Angew. Psych. 23, 320-338 (1976)
- Wermuth, N., Koller, S.: Systematik multivariater Korrelationsmuster, angewandt auf die Symptomenkorrelation von Krankheiten
Vortrag gehalten auf der 19. Jahrestagung der G.M.D.S., Mainz 1974, veröffentlicht in: Klinisch-Statistische Forschung, Schattauer, Stuttgart, 111-120 (1976)
- Wermuth, N., Scheidt, E.: Fitting a covariance selection model to a matrix, Algorithm AS 105
J. Roy. Statist. Soc C, Applied Statist., 26, 88-97, (1977)
- Wermuth, N., Wehner, T., Gönner, H.: Finding condensed descriptions for multidimensional data
Computer Programs in Biomedicine 6, 23-38 (1976)
- Wermuth, N., Wehner, T., Gönner, H., Schneidewind, G.: Ein Programm zum Erstellen, Verändern und Kondensieren von mehrdimensionalen Kontingenztafeln
Unveröffentlichtes Manuskript (1978)
- Wermuth, N., Yun, B.K., Gönner, H.: Hintergrund-Faktoren bei qualitativen Variablen - ein Computerprogramm
EDV in Medizin und Biologie, 7, 104-110 (1976)
- Wilks, S.S.: The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses
Ann. Math. Stat. 9, 60-62 (1938)
- Wilks, S.S.: Mathematical Statistics
Wiley, New York (1962)

- Wright, S.: The theory of path coefficients: a reply to
Niles' criticism
Genetics 8, 239-255 (1923)
- Wright, S.: The method of path coefficients
Ann. Math. Stat. 5, 161-215 (1934)
- Yule, G.U.: Why do we sometimes get nonsense-correlations
between time-series? A study in sampling and
the nature of time-series
J. Roy. Statist. Soc. 89, 1-16 (1926)