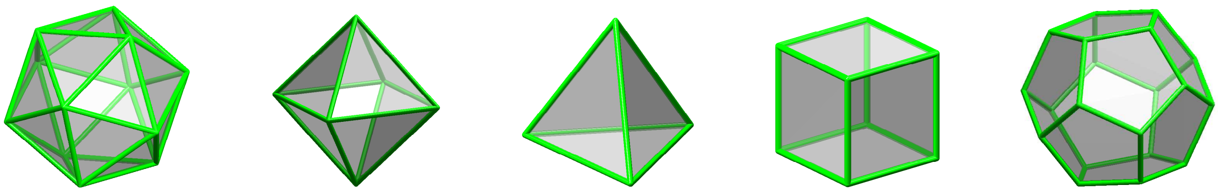
Platonska kroppar med Matlab

Inledning

Platonska kroppar är tre-dimensionella konvexa polyedrar som har likformiga polygoner som sidor. Lika många sidor möts i varje hörn och alla hörn är lika. Redan Euklides visade att det finns precis fem sådana kroppar. Vi ritar upp dem i ordningen ikosaeder, oktaeder, tetraeder, hexaeder (kub) och dodekaeder.



I sammanhanget kan vi nämna Arkimediska kroppar. Dessa har lika hörn men sidorna kan vara olika polygoner. Det finns tretton sådana.

Vi börjar med att rita en liksidig tetraeder med hörnpunkter på enhetssfären och hörnpunkternas koordinater som

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3}\right), \quad (0,0,1)$$

Först lagra vi koordinaterna som kolonner i en matris `H` enligt

```
a=2*sqrt(2)/3; b=-sqrt(2)/3; c=sqrt(2/3); d=-1/3;
H=[ a  b  b  0
    0  c -c  0
    d  d  d  1 ];
```

därefter tar vi och skriver ut de olika hörnens nummer på respektive plats i rummet, notera att `size(H,2)` ger antal kolonner i `H`, dvs. antal hörnpunkter.

```
figure(1), clf
axis equal, axis([-1 1 -1 1 -1 1]), axis vis3d, axis off
hold on
for i=1:size(H,2)
    text(H(1,i),H(2,i),H(3,i),num2str(i))
end
```

Skriv in detta i Matlab så blir det begripligt. Vi kan vända och vrida så vi ser var hörnen är placerade. Nu skall vi bilda en matris `S` som skall hålla ordning på vilka hörnpunkter som är hörn på de olika sidorna i tetraedern.

På rad 1 i `S`, dvs. `S(1,:)`, lagrar vi numren på hörnen på sidan 1, osv.

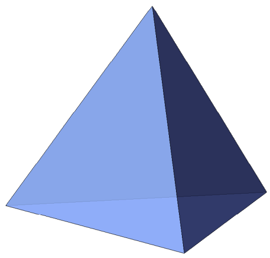
```
S=[ 1  2  3
    1  2  4
    1  3  4
    2  3  4 ];
```

Nu kan vi rita upp sidorna med `fill3`, notera att `size(S,1)` är antal rader i `S`, dvs. antal sidor på tetraedern

```
for i=1:size(S,1)
    Si=S(i,:); fill3(H(1,Si),H(2,Si),H(3,Si),'b','facealpha',0.2)
end
```

Det är förståndigt att bygga upp `S` rad för rad, och använda koden ovan för att rita fler och fler av tetraederns sidor. På så sätt ser vi vilka sidor vi inte redan har beskrivit.

Så här ser tetraedern ut när vi är färdiga (vi har lagt på belysning också).



På samma sätt kunna göra en matris `K` som håller reda på alla kanter på tetraedern. Dvs. numret på hörnen som är start- och slutpunkter för linjen som bildar en kant.

```
K=[ 1  2
    1  3
    2  3
    1  4
    2  4
    3  4 ];
```

Så här kan vi rita upp kanterna

```
for i=1:size(K,1)
    Ki=K(i,:); plot3(H(1,Ki),H(2,Ki),H(3,Ki),'k','linewidth',2)
end
```

När vi nu kommit fram till hur `H` och `S` skall se ut kan vi samla ihop koden för att rita tetraedern och så lägger vi på lite belysning och sånt

```
a=2*sqrt(2)/3; b=-sqrt(2)/3; c=sqrt(2/3); d=-1/3;
H=[ a  b  b  0
    0  c -c  0
    d  d  d  1 ];
S=[ 1  2  3
    1  2  4
    1  3  4
    2  3  4 ];
```

```
figure(2), clf
col=[0.4 0.5 1];     % RGB-trippel som ger en mild blå färg.
hold on
for i=1:size(S,1)
    Si=S(i,:); fill3(H(1,Si),H(2,Si),H(3,Si),col,'facealpha',0.8)
end
hold off
axis equal, axis off, axis vis3d, view(-45,16)
material shiny, camlight left, camlight head
```

Uppgift 1

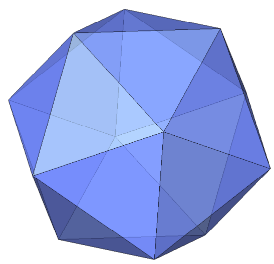
Nu är det dags för er att göra en ikosaeder. Den består av 20 liksidiga trianglar. Koordinaterna för hörnpunkterna kan vi ta som

$$(0, \pm 1, \pm\varphi)\,, \quad (\pm 1, \pm\varphi, 0)\,, \quad (\pm\varphi, 0, \pm 1)$$

där $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (gyllene snittet).

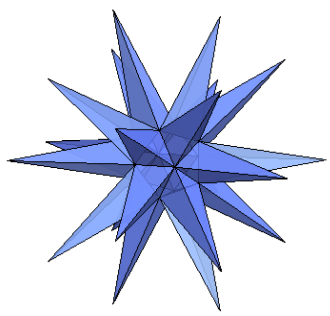
Om vi vill att hörnpunkterna skall ligga på enhetssfären skalar vi med faktorn $s = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$.

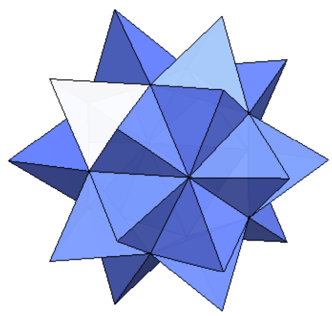
Rita nu upp ikosaedern genom att använda samma teknik som för tetraedern. Vi får jobba lite mer, vi har 12 hörn (istället för 4) och vi har 20 sidor (istället för 4). Något liknande följande bild bör ni komma fram till.



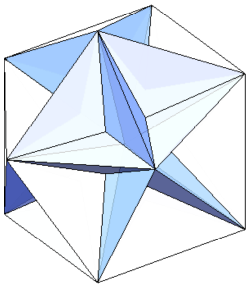
Stjärnformering – Vi kan göra en stjärna av vår ikosaeder genom att ta ut mittpunkten på varje sida och rita tre små triangel-flak istället för ett (för varje sida).

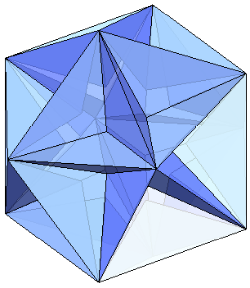
Vi skjuter ut mittpunkterna





eller drar in dem mot origo





Koden för att rita sidorna ersätts med

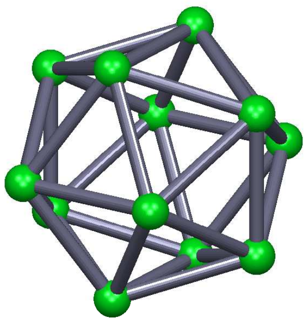
```
for i=1:size(S,1)
    Si=S(i,:);
    Mi=(H(:,Si(1))+H(:,Si(2))+H(:,Si(3)))/3; % Mittpunkten på sida nr i
    Mi=Mi*5;  % Skalning, pröva olika faktorer.
              % Med 5 får du en långarmad stjärna.
    fill3([H(1,Si(1:2)) Mi(1)],[H(2,Si(1:2)) Mi(2)],[H(3,Si(1:2)) Mi(3)],...
          col,'facealpha',0.8)
    fill3([H(1,Si(2:3)) Mi(1)],[H(2,Si(2:3)) Mi(2)],[H(3,Si(2:3)) Mi(3)],...
          col,'facealpha',0.8)
    fill3([H(1,Si([3,1])) Mi(1)],[H(2,Si([3,1])) Mi(2)],[H(3,Si([3,1])) Mi(3)],...
          col,'facealpha',0.8)
end
```

Dessa stjärnformiga polyedrar är inte Platonska kroppar (varför?).

Modifiera nu er kod. Prova lite olika värden på skalfaktorn (även negativa värden är kul) och vänd och vrid.

Uppgift 2

Vi skall rita ikosaedern med stänger och noder på följande sätt.



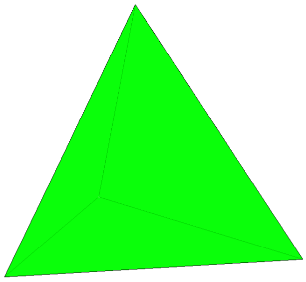
Då behöver vi vår kantmatris `K`. För att rita klot eller noder använder vi funktionen `klot` och för att rita stavar eller stänger använder vi funktionen `stav`. Båda finns på på materialsidan. Kopiera från matrialsidan till aktuell katalog (där du arbetar med MATLAB) och läs hjälptexterna med `help klot` respektive `help stav`.

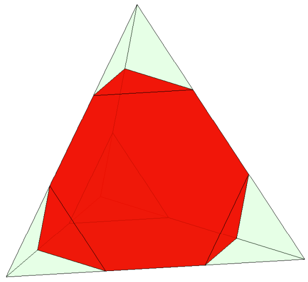
Uppgift 3

Vi kommer i denna uppgift behöva s.k. cellmatriser. Dessa byggs upp med { }, dvs. måsvingeparanteser. Exempelvis `A={{5 6 7};{3 4}}` ger oss en cellmatris med två rader, den ena raden med tre element och den andra med bara två element. Med `A{1}` får vi första raden och med `A{2}{3}` får vi andra radens tredje element. Vill vi ha de numeriska värdena från t.ex. första raden ger vi `cell2mat(A{1})`.

Vi vill kunna rita en polyeder som inte har likformiga sidor. Sidorna kommer då ha olika antal hörn, dvs. matrisen som håller reda på sidornas hörnnummer kommer ha olika långa rader. Det är här cellmatriserna kommer in.

Som exempel skall vi rita en stympad tetraeder som uppstått då vi klippt av alla hörnen. Så här kan det se ut, tetraedern till vänster av den stympade till höger. Den senare kommer ha trianglar och hexagoner som sidor.





Vi har sedan tidigare matrisen `H` med hörnpunkternas koordinater för tetraedern. Nu skall vi bilda de nya hörnpunkterna i den stympade tetraedern genom att placera dessa $c = 1/3$ in längs varje kant från ursprungliga hörnpunkterna. Så här får vi nya hörnpunkterna (12 stycken)

```
c=1/3;
P=zeros(3,12);
P(:,1:3)=  (1-c)*H(:,[1 1 1])+c*H(:,[2 3 4]);
P(:,4:6)=  (1-c)*H(:,[2 2 2])+c*H(:,[1 3 4]);
P(:,7:9)=  (1-c)*H(:,[3 3 3])+c*H(:,[1 2 4]);
P(:,10:12)=(1-c)*H(:,[4 4 4])+c*H(:,[1 2 3]);
```

Vi sätter ut nummer vid varje nytt hörn.

```
for i=1:size(P,2)
    text(P(1,i),P(2,i),P(3,i),num2str(i),'fontsize',14)
end
```

Vi sätter ihop den cellmatris som skall hålla reda på vilka hörnpunkter som bygger upp sidorna och efter hand ritar vi upp sidorna.

```
T={{10 11 12}
   {2 3 10 12 9 7}
   {1 3 10 11 6 4}
   {1 2 3}
   {4 5 6}
   {5 6 11  12 9 8}
   {7 8 9}
   {1 4 5 8 7 2}};
```

Vi ritar sidorna med (här behöver vi `cell2mat`)

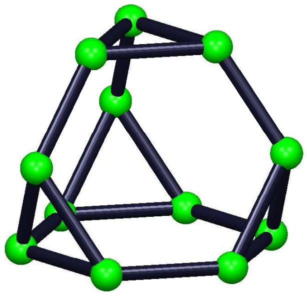
```
for i=1:size(T,1)
    Ti=cell2mat(T{i}); fill3(P(1,Ti),P(2,Ti),P(3,Ti),'r','facealpha',0.8)
end
```

Även en ny kantmatris behöver byggas upp.

```
L=[1 2
   2 3
   1 3
   1 4
   3 10
   2 7
   4 5
   5 6
   4 6
   5 8
   6 11
   7 8
   8 9
   7 9
   9 12
   10 11
   11 12
   10 12];

for i=1:size(L,1)
    Li=L(i,:); plot3(P(1,Li),P(2,Li),P(3,Li),'k','linewidth',2)
end
```

Så här ser resultatet ut när vi är klara och har ritat med stavar och kulor.



Detta är inte en Platonsk kropp, däremot är det en Arkimedisk kropp (4 trianglar, 4 hexagoner).

Nu skall vi se hur vi ritade bilderna ovan.

```
clf
rStav=0.03; rNod=0.07; colStav=[0.1 0.1 0.2]; colNod=[0 1 0];
hold on
for i=1:size(T,1)
    Ti=cell2mat(T{i}); fill3(P(1,Ti),P(2,Ti),P(3,Ti),0.5*[1 1 1],'facealpha',0.6)
end
```

```
for j=1:size(P,2)
    klot(P(:,j),rNod,50,colNod,1)
end
for i=1:size(L,1)
    Li=L(i,:); stav(P(:,Li(1)),P(:,Li(2)),rStav,20,colStav,1)
end
hold off
axis equal off tight vis3d
material metal
camlight left, camlight head, camlight right
rotate3d on
```

Uppgiften består nu i att arbeta igenom exemplet med tetraedern och (i mån av tid) göra om samma sak med kuben, dvs. rita en stympad kub. Placera de nya hörnpunkterna i den stympade kuben $c = 1/(2+\sqrt{2})$ in på varje kant, så att ni får ytterligare en Arkimedisk kropp (8 trianglar, 6 oktagoner). Ungefär så här kan det se ut när ni är klara.