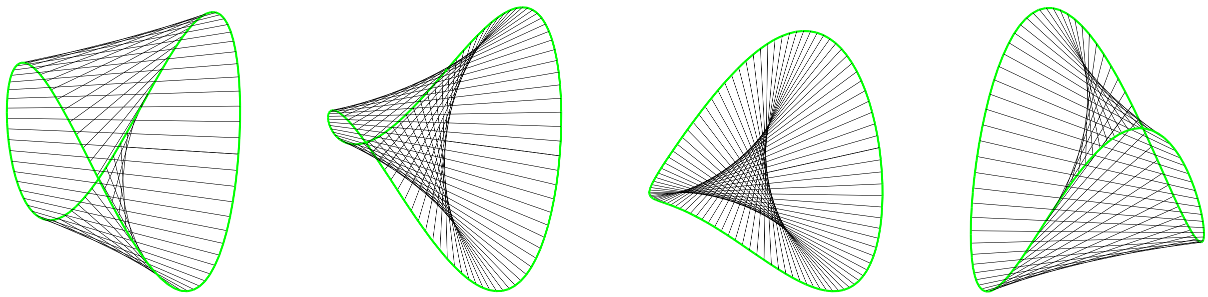
Geometri i rummet med Matlab

Inledning

Vi skall bygga upp ytor genom att lägga helt raka linjer (stänger) mot stödkurvor (ramar) av lite olika slag. Man kan också se det som att man drar strängar mellan olika punkter på ramen.

Här nedan ser vi ett exempel på vad man skulle kunna göra. Den gröna ramen är en sluten kurva i rummet. Stängerna går från ena sidan av ramen, genom en symmetriaxel, tvärs över till den andra sidan. Vi betraktar från några olika vinklar.



En yta som beskrivs av att det genom varje punkt (på ytan) går en rät linje som ligger i ytan brukar kallas för en "ruled surface". Om det genom varje punkt går två distinkta räta linjer (olika riktning) så kallas ytan för "doubly ruled".

Exempel på den första typen är en cylinder eller en kon och exempel på den andra typen är en hyperbolid (timglas) eller en hyperbolisk paraboloid (sadel).

Vi skall göra en cylinder och kommer då använda en cirkel som stödkurva. En cirkel i rummet med radien r och som ligger på planet $z = z_0$, där z_0 är konstant, ges av parameterframställningen

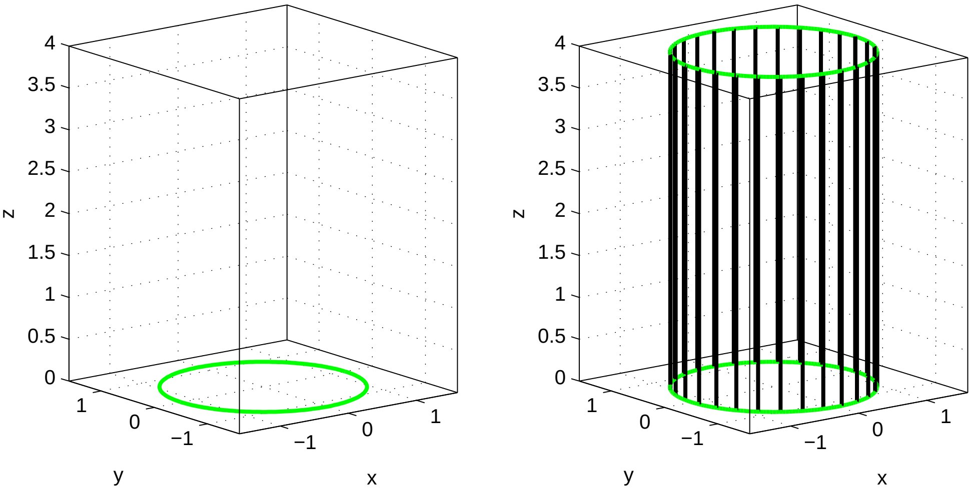
$$(x(t), y(t), z(t)) = (r\cos(t), r\sin(t), z_0), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Med `plot3` kan vi rita upp den enligt

```
figure(1), clf
t=linspace(0,2*pi,200);
r=1.2; z0=0;          % Vi måste ge siffervärden på r och z0
plot3(r*cos(t),r*sin(t),z0*ones(size(t)),'g','linewidth',2)
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5 0 4]), axis equal vis3d
grid on, box on
rotate3d on
xlabel('x'), ylabel('y'), zlabel('z')
```

Lägg märke till den tekniska detaljen att z-vektorn i `plot3` måste ha lika många element som de övriga vektorerna. Med `size` får vi storleken på vektorn `t` och `ones` ger sedan lika stor vektor fylld med ettor.

Nedan till vänster ser vi resultatet



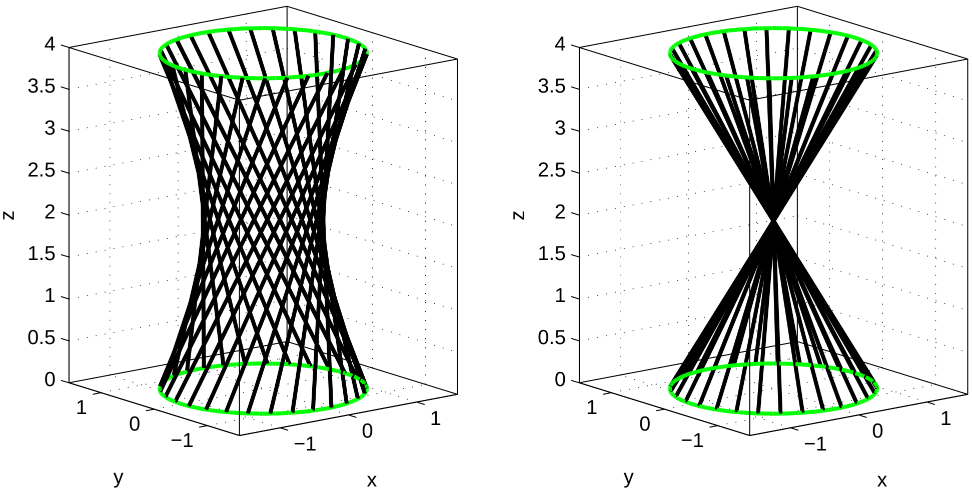
Vi ritar en cirkel på nivån $z = z_1$ och sedan ritar vi de räta linjerna (stängerna) mellan de två cirklarna enligt

```
hold on, z1=4;
plot3(r*cos(t),r*sin(t),z1*ones(size(t)),'g','linewidth',2)
tg=linspace(0,2*pi,30);     % Inte för tätt med stänger, 30 blir lagom
for i=1:length(tg)
    x0=r*cos(tg(i)); y0=r*sin(tg(i));
    plot3([x0 x0],[y0 y0],[z0 z1],'k','linewidth',2)
end
```

Vi får bilden ovan till höger.

Uppgift 1

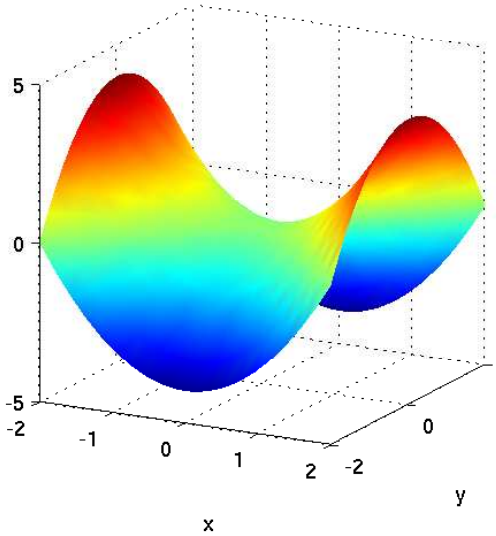
Rita en hyperbolid med hjälp av helt raka stänger genom att vrida taket på cylindern lite lagom. Man kan även dra stänger åt andra hållet, hyperboloiden är ju av typen ”doubly ruled”. Rita sedan två koner med spetsarna mot varandra genom att vrida taket tillräckligt mycket. Ungefär så här kommer resultatet se ut.

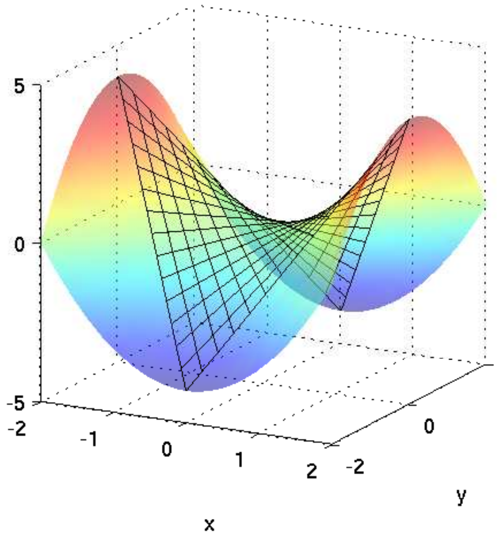


Vill man kan vi ta bort axlarna med `axis off` så våra geometriska konstruktioner syns lite bättre.

Uppgift 2

En hyperbolisk paraboloid (Adams kap. 10.5) ges av $f(x, y) = x^2 - y^2$ och ser ut som en sadel (bilden nedan till vänster). Rita upp funktionsytan. Försök sedan komma fram till hur du kan rita räta linjer så att de ligger på ytan. Rita linjer åt två håll (bilden till höger).





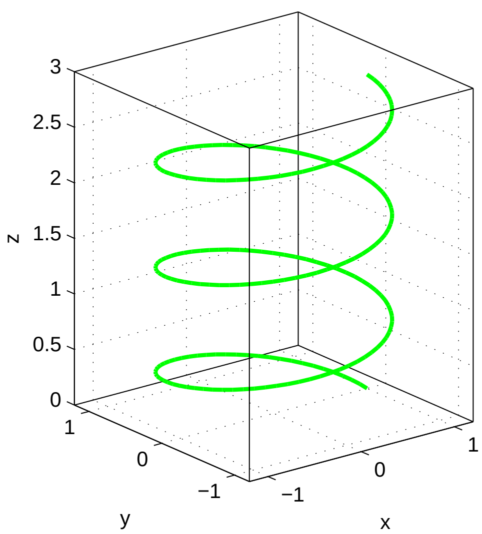
Uppgift 3

En spiralkurva i rummet (helix) som går runt tre varv beskrivs av parametriseringen

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), \sin(t), \alpha t), \quad 0 \leq t \leq 6\pi$$

där α ger stigningen. Vi ritar upp kurvan med `plot3` enligt

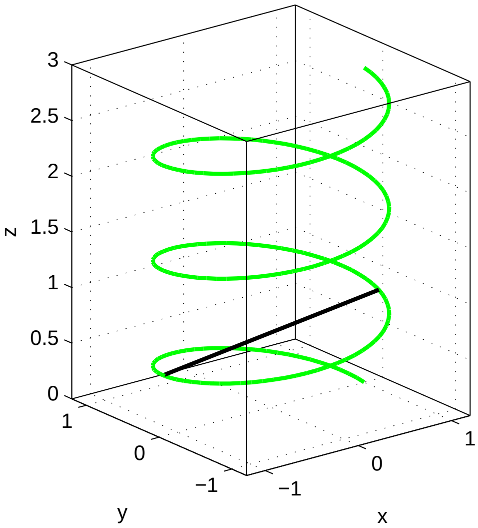
```
figure(1), clf
t=linspace(0,6*pi,200); alpha=0.15;
plot3(cos(t),sin(t),alpha*t,'g','linewidth',2)
axis vis3d, grid on, box on, rotate3d on
xlabel('x'), ylabel('y'), zlabel('z')
```



Pröva att ta fler varv i spiralen, tag 10 punkter istället för 200 i `linspace`, vänd och vrid.

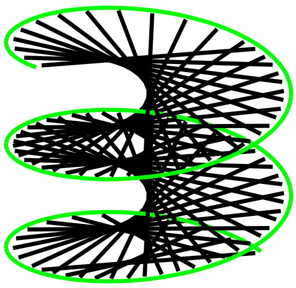
Nu tar vi och drar en linje tvärs över spiralen, med utgångspunkt och slutpunkt motsvarande parametervärdena t_s respektive $t_s + \Delta t$, där $\Delta t = \pi$.

```
ts=2.9; dt=pi; hold on
xb=cos([ts ts+dt]); yb=sin([ts ts+dt]); zb=alpha*[ts ts+dt];
plot3(xb,yb,zb,'k','linewidth',2)
```

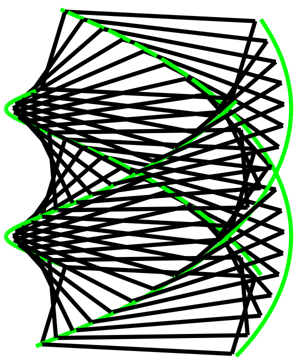


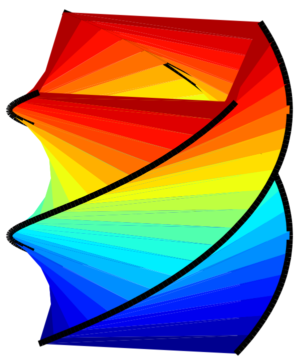
Fortsätt nu med att rita linjer på lagom avstånd längs hela kurvan.

När vi har ritat en massa linjer (stänger, strängar), tar vi bort axlarna och får en bild som den här nedan till vänster. Vi har även valt att inte gå tre hela varv med spiralen, utan stannat lite tidigare. Vill man kan vi även lägga en färgglad panel på vår spiralkonstruktion.



Varför inte fyra spiraler ... ... som vi gör färgglada.





Det allra sista gör man bara i mån av tid.