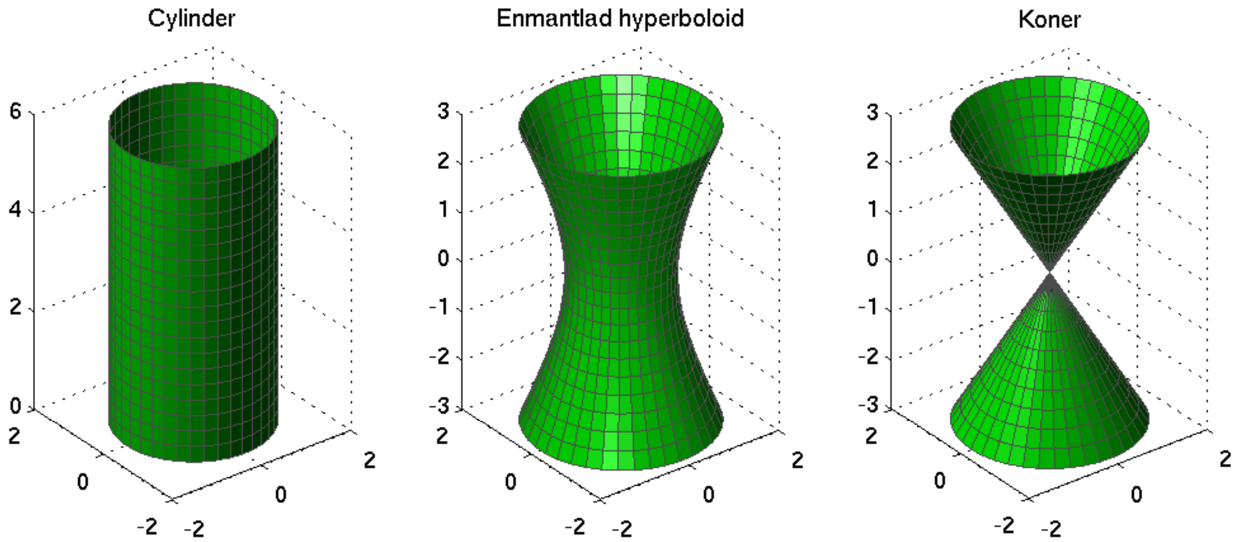
Parametriserade ytor i rummet med Matlab

Inledning

I förra laborationen ritade vi bl.a. cylindrar, enmantlade hyperboloider och koner med raka linjer mot stödkurvor. Nu skall vi rita dessa som parametriserade ytor och resultatet kommer se ut ungefär så här.



Vi börjar med en cylinder med (konstant) radie r och höjd h, som kan beskrivas av ekvationen

$$x^2 + y^2 = r^2, \ 0 \le z \le h$$

För att rita ytan är det lämpligt att göra en parametrisering

$$\begin{cases} x(s,t) = r\cos(t) \\ y(s,t) = r\sin(t) \\ z(s,t) = s \end{cases}$$

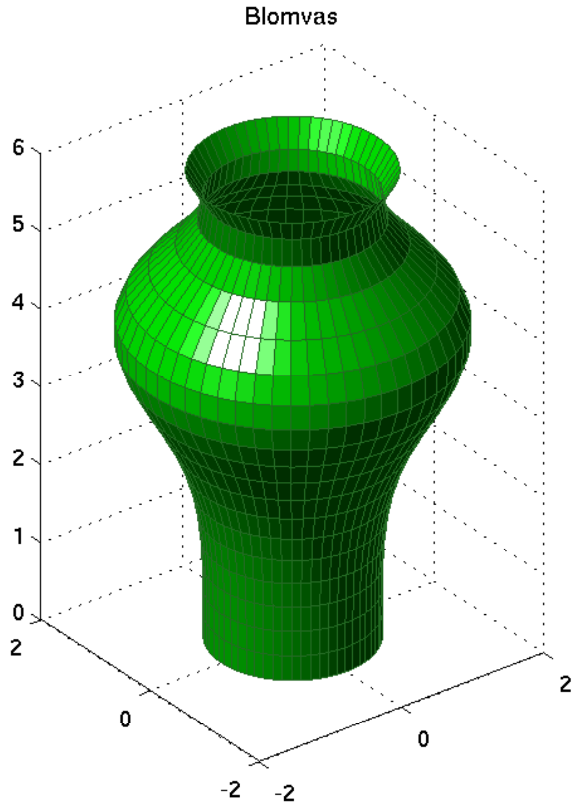
där $0 \le s \le h$ och $0 \le t \le 2\pi$.

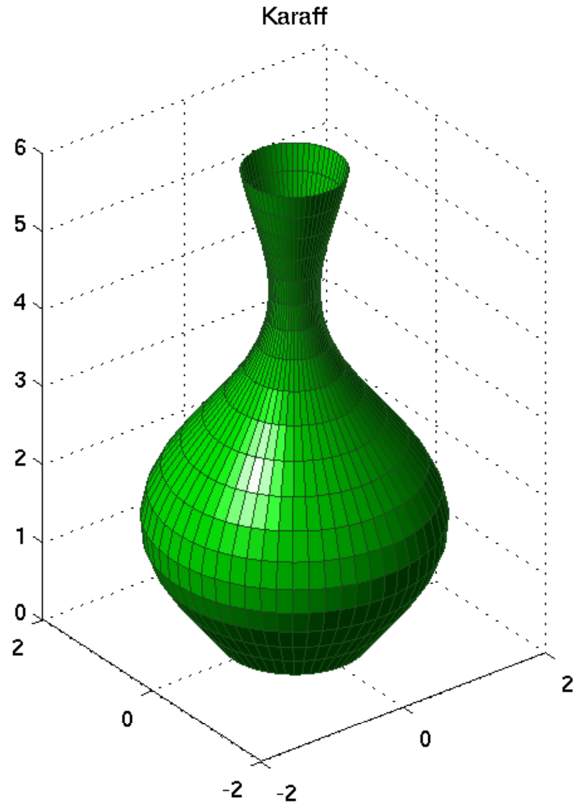
Här följer en kod som ger oss en bild av en cylinder med radie $r = 1.5$ och höjd $h = 6$.

```
r=1.5; h=6; n=40; m=20;
[S,T]=meshgrid(linspace(0,h,m),linspace(0,2*pi,n));
X=r*cos(T); Y=r*sin(T); Z=S;
surf(X,Y,Z)
axis equal, axis([-2 2 -2 2 0 6])
```

För cylindern hade vi $r(s) = r_0$, dvs. samma radie. Om vi istället låter $r(s) = 1 + \sin^2(0.1s^2)$ eller $r(s) = (1.2 + 0.7\sin(-0.5 + 1.2s))/(1 + 0.04s^2)$, dvs. låter radien variera, så blir det lite roligare.

```
h=6; n=40; m=20;
[S,T]=meshgrid(linspace(0,h,m),linspace(0,2*pi,n));
R=1+sin(0.1*S.^2).^2;
X=R.*cos(T); Y=R.*sin(T); Z=S;
surf(X,Y,Z)
axis equal, axis([-2 2 -2 2 0 6])
```





Var skiljer sig koden för att rita dessa ytor, från den för cylindern?

Uppgift 1

Den enmantlade hyperboloiden ges av ekvationen $x^2 + y^2 - z^2/c^2 = 1$ och kan parametriseras av

$$\begin{cases} x(s,t) = r(s)\cos(t) \\ y(s,t) = r(s)\sin(t) \\ z(s,t) = s \end{cases}$$

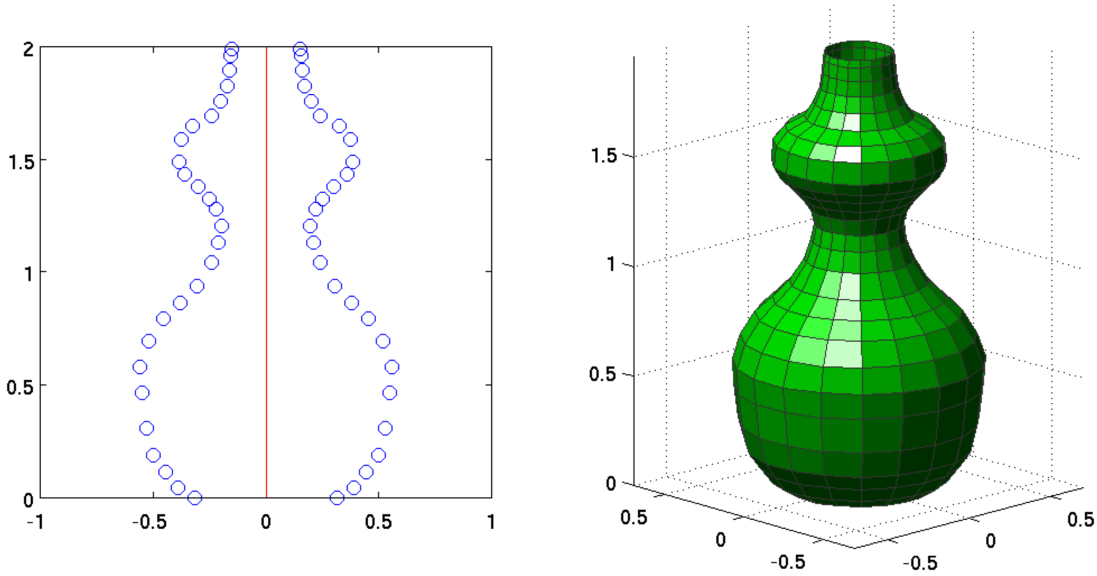
där $-d \leq s \leq d$ och $0 \leq t \leq 2\pi$, för lämpligt val av $r(s)$.

Bestäm $r(s)$ och rita upp ytan. Tag t.ex. $c = 2$ och $d = 3$.

Konerna ges av ekvationen $x^2 + y^2 - z^2/c^2 = 0$ och kan parametriseras på liknande sätt som hyperboloiden. Rita upp även dessa ytor.

Uppgift 2

Vi skall göra en vas på fri hand genom att klicka ut punkter för höger siluett (kontur) av en vas och låta denna kurva rotera runt en vertikal symmetriaxel. Dvs. vi gör två vektor `r` och `s` som beskriver höger siluett och ritar sedan upp ytan. Att rita siluetten är en liten variation av exemplet i uppföljningen till "Kontrollstrukturer i MATLAB". Repetera gärna det exemplet först.



Här ser vi två figurer. Till vänster har vi markerat höger siluett (och samtidigt ritat ut den vänstra) och till höger ser vi den uppritade ytan.

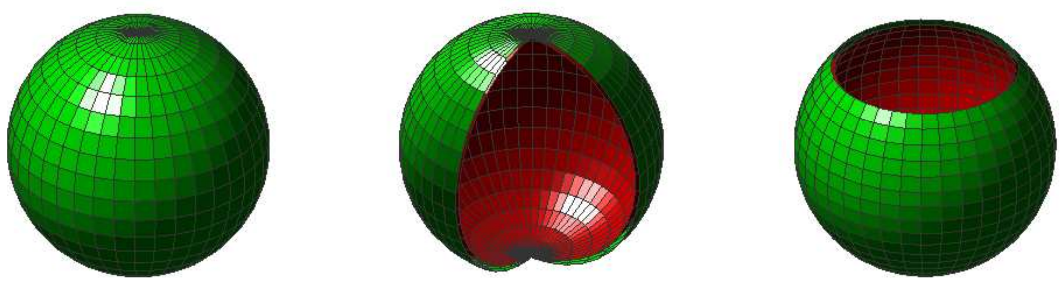
Uppgift 3

En sfär med radien r och centrum i origo ges av ekvationen $x^2+y^2+z^2 = r^2$ och kan parametriseras enligt

$$\begin{cases} x(s,t) = r\sin(s)\cos(t) \\ y(s,t) = r\sin(s)\sin(t) \\ z(s,t) = r\cos(s) \end{cases}$$

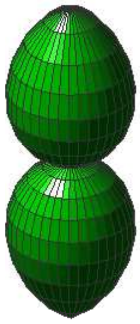
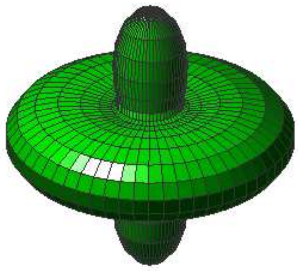
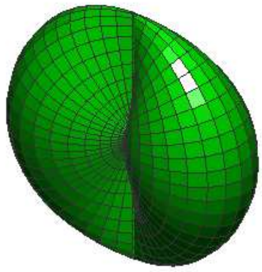
där $0 \leq s \leq \pi$ och $0 \leq t \leq 2\pi$.

Här nedan har vi ritat tre sfärer. I bilden i mitten har vi inte tagit med hela intervallet $0 \leq t \leq 2\pi$ och i den till höger har vi inte med hela $0 \leq s \leq \pi$.



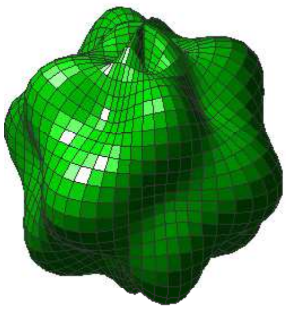
Den röda färgen inne i sfärerna har vi fått genom att rita samma yta fast röd och med en aningen mindre radie.

Vi kan få lite roliga ytor genom att låta radien bero av parametrarna s och t. Här nedan tar vi inte r konstant, utan vi tar $r = r(s)$ eller $r = r(t)$ som några olika funktioner av s respektive t. Vi ser i tur och ordning, $r(s) = |s - \frac{1}{2}\pi|$, $r(s) = 1 + 0.5\cos(4s)$ och $r(t) = 1 + 0.8\sin(2t)$.

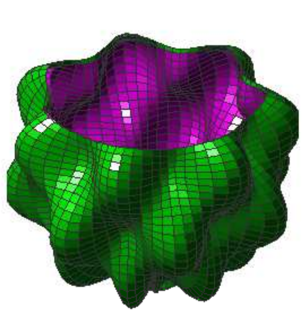




Här tar vi $r = r(s,t) = 1 + a\cos(ps)\sin(qt)$, dvs. en funktion av både s och t, för några olika värden på konstanterna a, p och q.

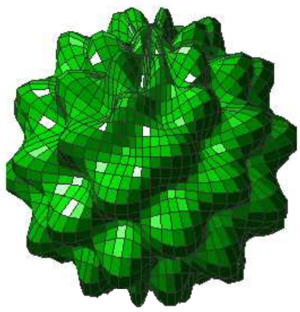
$a = 0.2, p = 4, q = 4$



$a = 0.2, p = 5, q = 7$

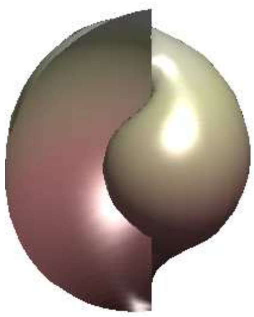


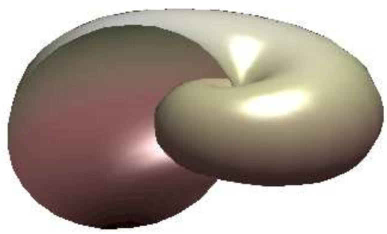
$a = 0.2, p = 9, q = 7$



När vi ritade ytan i mitten tog vi inte med hela s-intervallet, utan lämnade en liten öppning.

Vi kan göra några ytor som nästan ser ut som snäckor genom att t.ex. ta följande funktioner som radie: $r(s,t) = t$, $r(s,t) = st$ och $r(s,t) = a^t \sin(s)$, med $a = 1.17$, samt ta t-intervallet lite längre, $0 \le t \le 3\pi$.





Vi använder `colormap pink` som ger en snäckliknande färg. Själva lystern kommer från belysningen (`camlight`) och reflexionsmodellen (`phong`).

Uppgiften består nu i att rita de sfärer ni såg på förra sidan (ni behöver inte göra insidan i någon annan färg). Rita sedan någon av de ytor med varierande radie ni ser ovan, samt (i mån av lust och tid) experimentera lite med olika funktionsuttryck för att få fram ytterligare någon rolig yta.