

# Tillämpning av integraler

## 1 Inledning

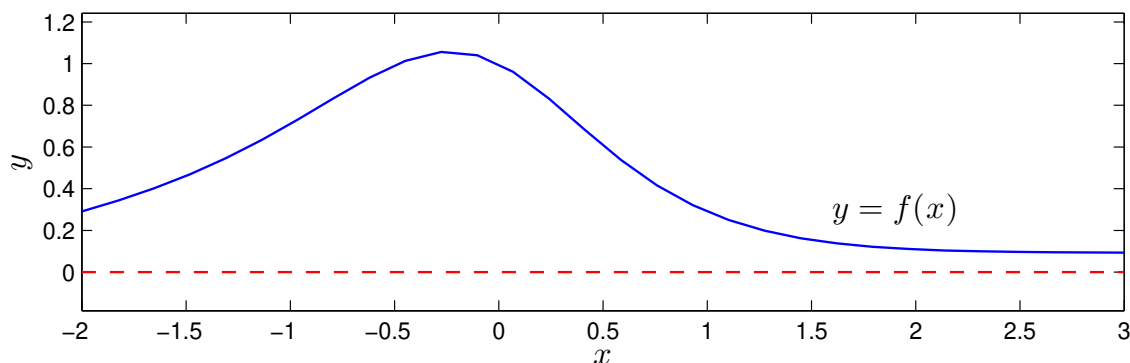
Vi skall se på två tillämpningar av integraler. Först arean och volymen av rotationskropp sedan grafen av en funktion av typen  $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$ .

## 2 Rotationskroppar

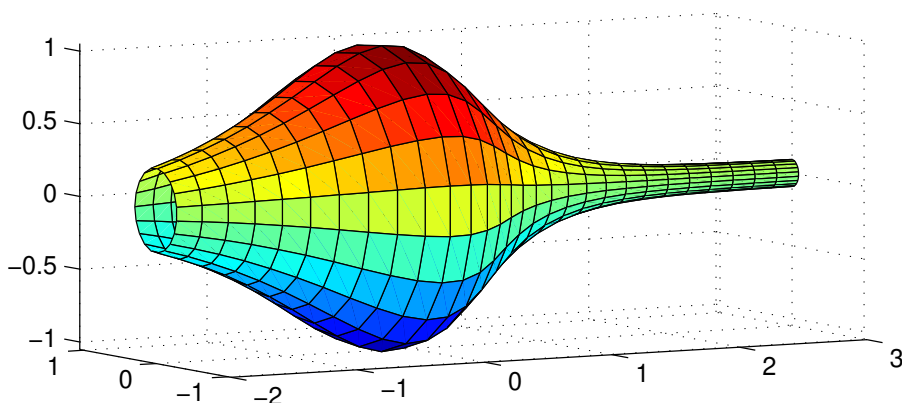
Betrakta kurvan som ger grafen av en funktion  $y = f(x)$  över ett intervall  $a \leq x \leq b$ . Som exempel kan vi ta

$$f(x) = \frac{1 - 0.5 \sin(x)}{1 + x^2}, \quad -2 \leq x \leq 3$$

Så här ser kurvan ut



Låter vi denna kurva rotera runt  $x$ -axeln får vi en s.k. rotationsyta



Vi vill bestämma volymen som begränsas innanför rotationsytan och arean av själva ytan.

Volymen som begränsas av rotationsytan ges av (Adams kapitel 7.1)

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

och arean av rotationsytan ges av (Adams kapitel 7.3)

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

För vårt exempel nöjer vi oss med en numerisk beräkning av volym  $V$  och ytarea  $S$  enligt

```
>> f=@(x)(1-0.5*sin(x))./(1+x.^2);
>> Df=@(x)-0.5*cos(x)./(1+x.^2)-(1-0.5*sin(x))*2.*x./(1+x.^2).^2;
>> a=-2; b=3;
>> V=pi*integral(@(x)f(x).^2,a,b)
V =
    5.1095

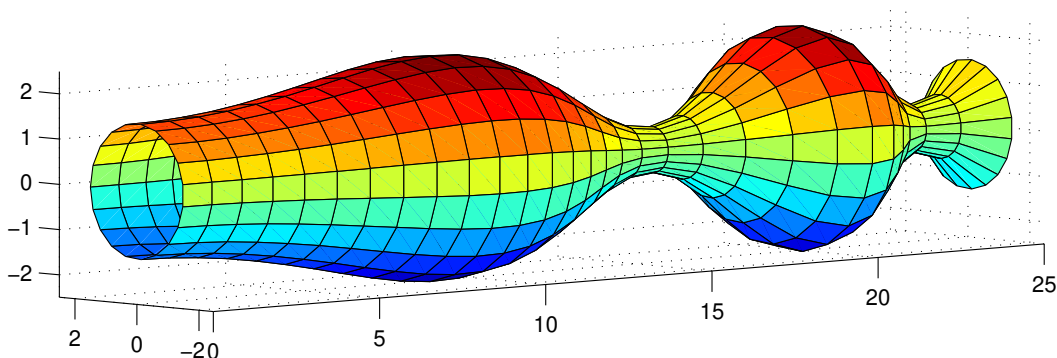
>> S=2*pi*integral(@(x)abs(f(x)).*sqrt(1+Df(x).^2),a,b)
S =
    16.3260
```

**Uppgift 1.** Beräkna volymen och arean för rotationsytan som ges av att grafen till

$$f(x) = 1.5 + \sin(0.02 x^2), \quad 0 \leq x \leq 25$$

roterar runt  $x$ -axeln.

Så här ser ytan ut



Om du vill se koden som genererar ytan kan du titta på funktionen `rotationsyta` som ligger på MATLAB-hemsidan (förståelsen får kanske vänta till kursen i flervariabelanalys).

### 3 Grafen av $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$

Ibland vill man rita grafen av en funktion definierad genom  $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$  över ett intervall  $a \leq x \leq b$ . Om det inte finns någon användbar primitiv funktion till integranden  $g$  är detta en relativt krävande uppgift, för varje  $x$ -värde som behövs för grafen måste vi beräkna  $f(x)$  genom att beräkna en integral.

Man kan i MATLAB beräkna funktionen  $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$  för en parameter  $x$ , som vi kan ge olika värden, enligt

```
>> f=integral(@(t)g(t,x),c,d)
```

Här förutsätts att  $g$  är en funktionsbeskrivning (funktionsfil eller anonym funktion med funktionshandtag) i de två variablerna  $t$  och  $x$ .

Skall vi nu rita en graf av  $f(x)$  över  $a \leq x \leq b$ , så är här strukturen på en skriptfil för detta.

```
g=@(t,x)...;           % Integranden, om vi gör ett funktionshandtag
c=...; d=...;         % Integrationsgränserna

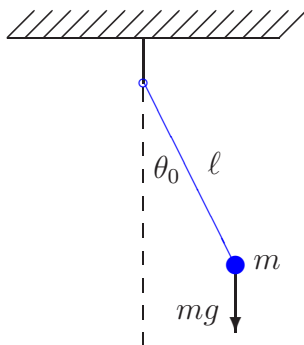
a=...; b=...; n=...;  % Intervallgränser för grafen samt antal punkter
x=linspace(a,b,n);    % x-värdena
f=zeros(size(x));     % Fördimensionering. Skall fylla på integralvärdena

for i=1:length(x)
    f(i)=integral(@(t)g(t,x(i)),c,d); % f(x)-värdena
end

plot(x,f)             % Ritar grafen
```

Tänk igenom noggrant. När man förstår matematiken så bör inte följande uppgift vara något större problem.

**Uppgift 2.** Den matematiska pendeln. En masspunkt med massan  $m$  hänger i en viktlös smal stav av längden  $\ell$ .



Vi vill för olika begynnelseutslag  $\theta_0$  bestämma pendelns periodlängd.

Periodlängden ges av formeln

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2(\theta)}}$$

där integralen är en s.k. elliptisk integral som saknar användbar primitiv funktion.

Låt  $\ell = 0.1$  m och tag begynnelseutslagen  $\theta_0 = 10^\circ, 30^\circ, \dots, 170^\circ$ . Beräkna en approximation av periodlängden för de olika begynnelseutslagen. Rita en graf av  $T$  som funktion av  $\theta_0$ . Använd radianer vid integralberäkningarna och dessa skall göras med funktionen `integral`.

## 1 Målsättning

Avsikten med denna laboration är delvis att tillämpa kunskaper från förra laborationen på några uppgifter i anslutning till rotationskroppar. Betydligt viktigare är dock att kunna beräkna en funktion  $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$ , vars värden ges av att en annan funktion skall integreras. Vanligtvis kan vi inte finna någon (användbar) primitiv funktion, så endast beräkningsmetoder kan användas.

## 2 Kommentarer och förklaringar

Nu ser vi på MATLAB-koden i strukturen för skriptfilen för att rita grafen till  $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$  och börjar med

```
f=zeros(size(x))
```

Här ger `size(x)` storleken på vektorn `x`. Därmed ger `zeros(size(x))` en vektor, lika stor som `x`, fylld med nollor. Nu kommer `f` vara en vektor av rätt storlek och vi fyller på rätt värden i `for`-satsen.

För beräkningen av  $f(x_i) = \int_c^d g(t, x_i) dt$  skriver vi

```
f(i)=integral(@(t)g(t,x(i)),c,d)
```

Vi tittar särskilt på

```
@(t)g(t,x(i))
```

Detta är en anonym funktion med ett funktionshandtag. Här är  $t$  variabeln och funktionens värde är  $g(t, x_i)$ , där  $x_i$  är ett konstant värde. Vi har alltså en funktion i en variabel `t` som `integral` kommer integrera.

## 3 Lärandemål

Efter denna laboration skall du kunna

- beräkna volymer och areor av rotationskroppar
- rita grafen till en funktion  $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$  över ett intervall  $a \leq x \leq b$  med hjälp av `min_integral` eller `integral`.