Tillämpning av integraler

1 Inledning

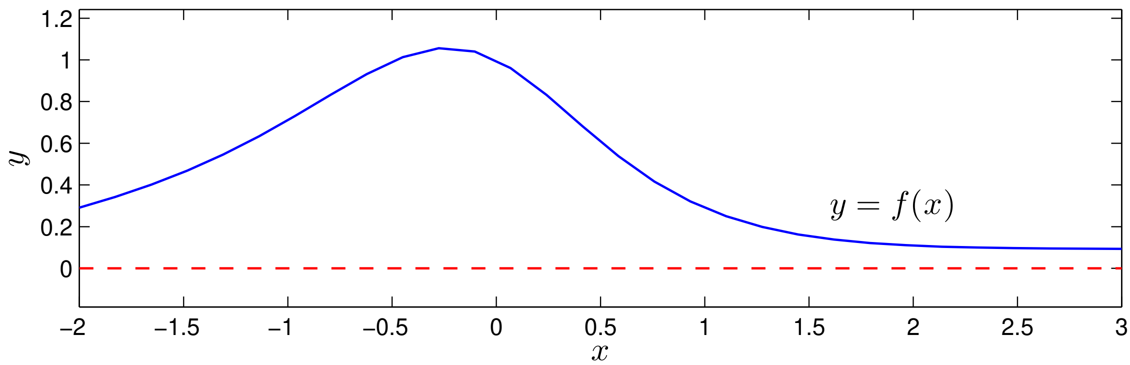
Vi skall se på två tillämpningar av integraler. Först arean och volymen av rotationskropp sedan grafen av en funktion av typen $f(x) = \int_c^d g(t, x)\, dt$.

2 Rotationskroppar

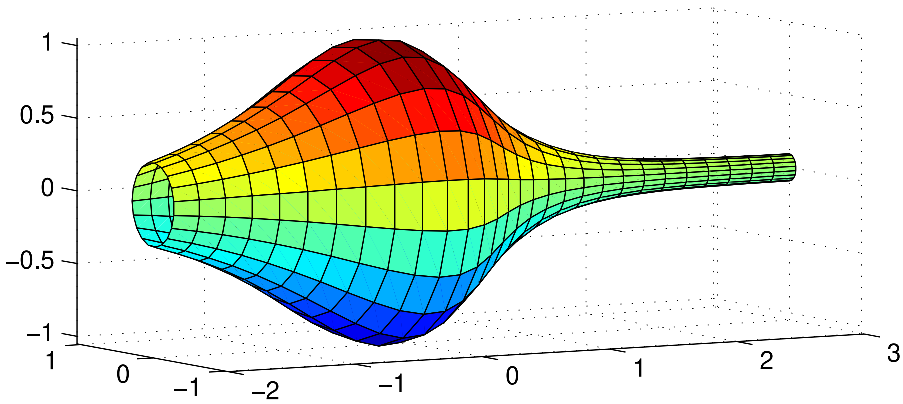
Betrakta kurvan som ger grafen av en funktion $y = f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$. Som exempel kan vi ta

$$f(x) = \frac{1 - 0.5\,\sin(x)}{1 + x^2}, \quad -2 \leq x \leq 3$$

Så här ser kurvan ut



Låter vi denna kurva rotera runt x-axeln får vi en s.k. rotationsyta



Vi vill bestämma volymen som begränsas innanför rotationsytan och arean av själva ytan.

Volymen som begränsas av rotationsytan ges av (Adams kapitel 7.1)

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

och arean av rotationsytan ges av (Adams kapitel 7.3)

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

För vårt exempel nöjer vi oss med en numerisk beräkning av volym V och ytarea S enligt

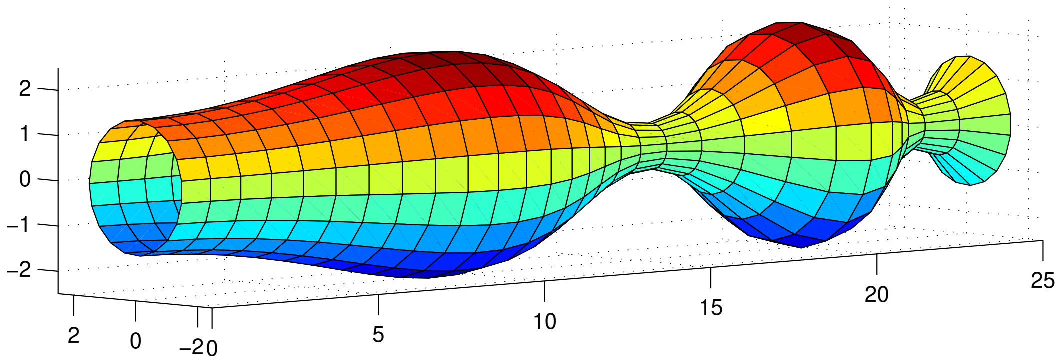
```
>> f=@(x)(1-0.5*sin(x))./(1+x.^2);
>> Df=@(x)-0.5*cos(x)./(1+x.^2)-(1-0.5*sin(x))*2.*x./(1+x.^2).^2;
>> a=-2; b=3;
>> V=pi*integral(@(x)f(x).^2,a,b)
V =
    5.1095

>> S=2*pi*integral(@(x)abs(f(x)).*sqrt(1+Df(x).^2),a,b)
S =
   16.3260
```

Uppgift 1. Beräkna volymen och arean för rotationsytan som ges av att grafen till

$$f(x) = 1.5 + \sin(0.02\, x^2), \quad 0 \le x \le 25$$

roterar runt x-axeln.

Så här ser ytan ut



Om du vill se koden som genererar ytan kan du titta på funktionen `rotationsyta` som ligger på laborationshemsidan (förståelsen får kanske vänta till kursen i flervariabelanalys).

3 Grafen av $f(x) = \int_c^d g(t, x)\, dt$

Ibland vill man rita grafen av en funktion definierad genom $f(x) = \int_c^d g(t, x)\, dt$ över ett intervall $a \le x \le b$. Om det inte finns någon användbar primitiv funktion till integranden g är detta en relativt krävande uppgift, för varje x-värde som behövs för grafen måste vi beräkna $f(x)$ genom att beräkna en integral.

Man kan i MATLAB beräkna funktionen $f(x) = \int_c^d g(t,x)\,dt$ för en parameter x, som vi kan ge olika värden, enligt

```
>> f=integral(@(t)g(t,x),c,d)
```

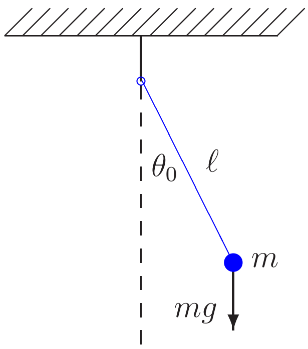
Här förutsätts att `g` är en funktionsbeskrivning (funktionsfil eller anonym funktion med funktionshandtag) i de två variablerna `t` och `x`.

Skall vi nu rita en graf av $f(x)$ över $a \leq x \leq b$, så är här strukturen på en skriptfil för detta.

```
g=@(t,x)...;               % Integranden, om vi gör ett funktionshandtag
c=...; d=...;              % Integrationsgränserna

a=...; b=...; n=...;       % Intervallgränser för grafen samt antal punkter
x=linspace(a,b,n);         % x-värdena
f=zeros(size(x));          % Fördimensionering. Skall fylla på integralvärdena

for i=1:length(x)
    f(i)=integral(@(t)g(t,x(i)),c,d);   % f(x)-värdena
end

plot(x,f)                  % Ritar grafen
```

Tänk igenom noggrant. När man förstår matematiken så bör inte följande uppgift vara något större problem.

Uppgift 2. Den matematiska pendeln. En masspunkt med massan m hänger i en viktlös smal stav av längden ℓ.



Vi vill för olika begynnelseutslag θ_0 bestämma pendelns periodlängd.

Periodlängden ges av formeln

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2)\sin^2(\theta)}}$$

där integralen är en s.k. elliptisk integral som saknar användbar primitiv funktion.

Låt $\ell = 0.1$ m och tag begynnelseutslagen $\theta_0 = 10°, 30°, \cdots, 170°$. Beräkna en approximation av periodlängden för de olika begynnelseutslagen. Rita en graf av T som funktion av θ_0. Använd radianer vid integralberäkningarna och dessa skall göras med funktionen `integral`.

1 Målsättning

Avsikten med denna laboration är delvis att tillämpa kunskaper från förra laborationen på några uppgifter i anslutning till rotationskroppar. Betydligt viktigare är dock att kunna beräkna en funktion $f(x) = \int_c^d g(t,x)\,dt$, vars värden ges av att en annan funktion skall integreras. Vanligtvis kan vi inte finna någon (användbar) primitiv funktion, så endast beräkningsmetoder kan användas.

2 Kommentarer och förklaringar

Nu ser vi på MATLAB-koden i strukturen för skriptfilen för att rita grafen till $f(x) = \int_c^d g(t,x)\,dt$ och börjar med

```
f=zeros(size(x))
```

Här ger `size(x)` storleken på vektorn `x`. Därmed ger `zeros(size(x))` en vektor, lika stor som `x`, fylld med nollor. Nu kommer `f` vara en vektor av rätt storlek och vi fyller på rätt värden i `for`-satsen.

För beräkningen av $f(x_i) = \int_c^d g(t,x_i)\,dt$ skriver vi

```
f(i)=integral(@(t)g(t,x(i)),c,d)
```

Vi tittar särskilt på

```
@(t)g(t,x(i))
```

Detta är en anonym funktion med ett funktionshandtag. Här är t variabeln och funktionens värde är $g(t,x_i)$, där x_i är ett konstant värde. Vi har alltså en funktion i en variabel `t` som `integral` kommer integrera.

3 Lärandemål

Efter denna laboration skall du kunna

- beräkna volymer och areor av rotationskroppar
- rita grafen till en funktion $f(x) = \int_c^d g(t,x)\,dt$ över ett intervall $a \le x \le b$ med hjälp av `min_integral` eller `integral`.