Mer om geometriska transformationer

1 Inledning

Vi fortsätter med geometriska transformationer och ser på ortogonal (vinkelrät) projektion samt spegling. Avslutningsvis skall vi även se på rotation runt sned axel i $\mathbb{R}^3$, förra laborationen roterade vi bara runt koordinataxlarna.

Men allra först ser vi kort hur man beräknar skalärprodukt, norm och liknande i Matlab.

2 Skalärprodukt och norm i Matlab

Skalärprodukten mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ges av

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

och normen, som motsvarar absolutbelopp, ges av

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \qquad (\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u})$$

Med Matlab beräknar vi skalärprodukt och norm med funktionerna `dot` och `norm` enligt

```
>> dot(u,v)
>> norm(u)
```

Vinkeln ϕ mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ges av

$$\phi = \arccos\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

och beräknas i Matlab med

```
>> phi=acos(dot(u,v)/(norm(u)*norm(v)))
```

Vi påminner oss om att vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala eller vinkelräta mot varandra om $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, vilket ofta betecknas $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

En enhetsvektor är en vektor $\mathbf{u}$ med $\|\mathbf{u}\| = 1$. Vill vi bestämma en enhetsvektor $\mathbf{u}$ med samma riktning som vektorn $\mathbf{v}$ så ges den av $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ och i Matlab skulle vi skriva

```
>> u=v/norm(v)
```

Avståndet mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ges av

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + (u_3-v_3)^2}$$

och beräknas med

```
>> norm(u-v)
```

Dessa beräkningar görs på samma sätt för vektorer i $\mathbb{R}^n$, oavsett om $n = 2$, 3, eller större.

Även om vi inte använder den nu, så nämner vi kryssprodukten i $\mathbb{R}^3$ som ges av

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

vilket är en vektor i $\mathbb{R}^3$ och beräknas med funktionen `cross` enligt

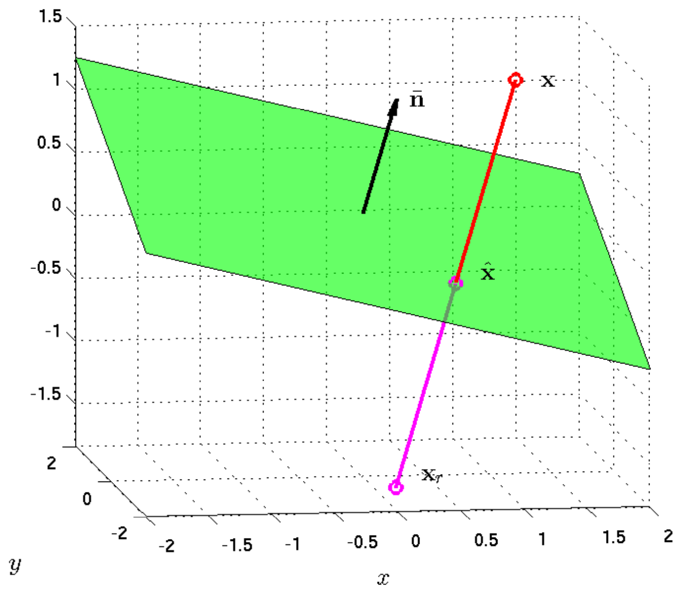
```
>> cross(u,v)
```

3 Ortogonal projektion och spegling

Vi skall bestämma ortogonala eller vinkelräta projektionen på planet

$$ax + by + cz = d$$

Planet har en normalvektor $\mathbf{n} = (a, b, c)$. I bilden har vi ritat en enhetsnormal $\bar{\mathbf{n}}$ och projektionen $\hat{\mathbf{x}}$ längs normalen av en punkt $\mathbf{x}$, dvs. den vinkelräta projektionen på planet.



Vi gör ansatsen $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \alpha\,\mathbf{n}$ där α skall bestämmas så att $\hat{\mathbf{x}}$ ligger på planet.

Ekvationen för planet kan skrivas

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{x}} = d$$

och sätter vi in ansatsen får vi

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} + \alpha\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \alpha\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = d$$

och därmed

$$\alpha = \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}$$

För speglingen av $\mathbf{x}_r$ av punkten $\mathbf{x}$ i planet gäller

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{x} + 2\alpha\,\mathbf{n}$$

med samma val av α.

Nu skall vi i MATLAB rita planet $ax + by + cz = d$, för $a = 1, b = -1, c = 4$ och $d = 1$. Eftersom $c \neq 0$ så kan vi lösa ut z, i annat fall får vi modifiera koden

```
xmin=-2; xmax=2; ymin=-2; ymax=2;
a=1; b=-1; c=4; d=1;
X=[xmin xmax xmax xmin]; Y=[ymin ymin ymax ymax];
Z=(d-a*X-b*Y)/c;
fill3(X,Y,Z,'g','facealpha',0.7)
xlabel('x'), ylabel('y')
axis equal, grid on
```

Resultatet blir planet i figuren ovan. Egentligen är det ju bara en bit av planet, nämligen den del som ligger ovanför området $-2 \leq x \leq 2,\ -2 \leq y \leq 2$.

Uppgift 1. Rita planet vi just tittade på. Bestäm en normalvektor och rita ut den med en pil från en punkt på planet. Pilar ritade vi i planet med `quiver` i höstas i samband med differentialekvationer. När vi nu skall rita en pil i rummet kan vi göra det med `quiver3(x,y,z,a,b,c,s)`, där x, y, z ger koordinaterna för den punkt som pilen skall ritas från, a, b, c ger pilens utsträckning och s är en skalfaktor (normalt tar vi $s = 0$ vilket ritar utan skalning, medan t.ex. $s = 2$ gör pilarna dubbelt så långa). Välj en punkt $\mathbf{x}$, rita ut den, bestäm dess vinkelräta projektion $\hat{\mathbf{x}}$ på planet och rita ut även den. Slutligen rita också ut speglingen $\mathbf{x}_r$ av $\mathbf{x}$. Markera normalvektorn och de olika punkterna med texter. T.ex. normalvektorn kan markeras med `text(u,v,w,'n')`, där u, v, w är koordinaterna för positionen av vänster sida av texten och `'n'` är texten som skall skrivas, dvs. ett n.

Snyggare blir det om vi sätter ut $\bar{\mathbf{n}}$ med LaTeX enligt

```
text(u,v,w,'$\bar{\mathbf{n}}$','interpreter','latex','fontsize',12)
```

och på motsvarande sätt får vi $\mathbf{x}$, $\hat{\mathbf{x}}$ och $\mathbf{x}_r$ med `$\mathbf{x}$`, `$\hat{\mathbf{x}}$` respektive `$\mathbf{x}_r$`.

Uppgift 2. Rita samma plan i en ny bild. I samma bild skall ni rita en tetraeder. Tetraedern skall vara så placerad att ingen av dess sidor skär planet. Rita därefter projektionen och speglingen av tetraedern i planet.

4 Rotation runt sned axel i $\mathbb{R}^3$

Betrakta en punkt $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ i $\mathbb{R}^3$. Antag vi vill rotera pukten runt en axel, vars riktning ges av en vektor $\mathbf{v}$, med en vinkel ϕ. Rotationen skall göras medurs relativt riktningen på vektorn.

Vi kan då via ett basbyte återföra denna rotation till en rotation runt x_1-, x_2- eller x_3-axeln. För dessa har vi redan sett på standardmatriserna i förra laborationen.

Säg att vi vill återföra till en rotation runt x_1-axeln. Vi normaliserar $\mathbf{v}$, dvs. vi bildar $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}$ där skalfaktorn α väljs så att $\mathbf{v}_1$ får enhetslängd. Därefter väljer vi två vektorer $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$, båda av enhetslängd, så att $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är vinkelräta mot $\mathbf{v}_1$ och vinkelräta mot varandra.

Vi skall helt enkelt se till att $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ blir en ortogonalbas för nollrummet $\mathcal{N}(\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}})$. Denna bas kan vi lätt beräkna i MATLAB med funktionen `null`.

Vi undersöker om $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är en höger orienterad bas genom att beräkna determinanten

$$D = \det\left([\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]\right).$$

Om $D > 0$ så väljer vi $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}_3$ annars tar vi $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_3$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}_2$.

Nu bildar vi basbytesmatrisen $\mathbf{P} = [\,\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\,]$ och eftersom kolonnerna ortogonala och normerade så gäller $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}$.

Standardmatrisen för rotation runt axeln som ges av $\mathbf{v}$ blir

$$\mathbf{A}_{\mathbf{v}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{\mathsf{T}}$$

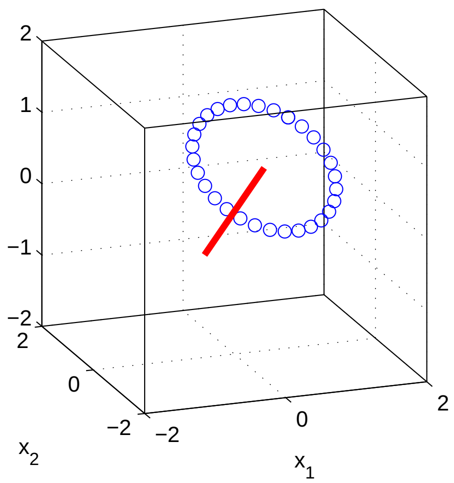
där

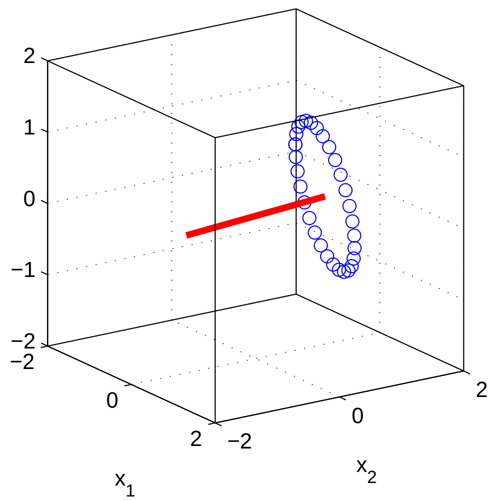
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

är standardmatrisen för rotationen runt x_1-axeln.

Detaljerna ovan tar nog lite tid att förstå, vi utnyttjar både vektorrum och basbyte. Det hindrar inte att vi kan rotera i MATLAB redan nu.

Nedan ser vi en rotation av en punkt runt en viss axel, upprepad några gånger, sett från två olika betraktelsevinklar.





Så här gjorde vi en skriptfil i MATLAB

```
phi=pi/15;
A=[1 0 0; 0 cos(phi) -sin(phi); 0 sin(phi) cos(phi)];
v=[2;2;1]; v=v/norm(v); Z=null(v'); P=[v,Z];
if det(P)<0, P(:,[2 3])=P(:,[3 2]); end
Av=P*A*P';
x=[0.8; 0.1; 1.2];
plot3(x(1),x(2),x(3),'o'), hold on
for i=1:30
    x=Av*x;
    plot3(x(1),x(2),x(3),'o')
end
plot3([-v(1) v(1)],[-v(2) v(2)],[-v(3) v(3)],'r','linewidth',3)
box on, grid on, hold off
axis equal, axis([-2 2 -2 2 -2 2]), axis vis3d
```

Uppgift 3. Rotera, med en liten vinkel upprepade gånger, en punkt runt någon sned axel som ni själva väljer (dock inte samma punkt och axel som i exemplet).

Uppgift 4. *Frivillig*! Rotera en tetraeder runt någon sned axel som ni själva väljer. Det skall vara en animering, precis som i uppgift 4 i förra laborationen. Se till att tetraederna är placerad i förhållande till axeln så att rotationen syns tydligt. Tetraedern får givetvis inte deformeras under rotationen.

1 Målsättning

Denna laborationen är en fortsättning på den förra. Vi utökar transformationerna med projektion och spegling samt rotation runt godtycklig axel.

2 Kommentarer och förklaringar

Vi skall se lite mer på den ortogonala projektionen på ett plan $ax + by + cz = d$ där a, b, c och d är konstanter.

Om $\mathbf{x}$ är den punkt vi projicerar och $\hat{\mathbf{x}}$ är projektionen så gäller

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \alpha\,\mathbf{n}, \qquad \alpha = \frac{d - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}$$

där $\mathbf{n} = (a, b, c)$ är en normalvektor till planet.

Om $d = 0$, dvs. planet går genom origo, har vi

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \alpha\,\mathbf{n} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}$$

Eftersom $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}$ är en skalär så gäller

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n} = \mathbf{x} - \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})$$

Vidare gäller att $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, dvs. skalärprodukten kan beräknas genom att $\mathbf{n}^\mathsf{T}$ som är en radvektor matrismultipliceras med kolonnvektorn $\mathbf{x}$ och vi får

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,(\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,(\mathbf{n}\,\mathbf{n}^\mathsf{T})\,\mathbf{x} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n}^\mathsf{T}\right)\mathbf{x}$$

där vi utnyttjade att $\mathbf{n}\,(\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{x}) = (\mathbf{n}\,\mathbf{n}^\mathsf{T})\,\mathbf{x}$.

Observera att $\mathbf{n}\,\mathbf{n}^\mathsf{T}$ är en matris (en s.k. ytterprodukt), medan $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{n}$ är ett tal (skalärprodukt eller innerprodukt).

Vi har kommit fram till

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n}^\mathsf{T}\right)\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}$$

Alltså en linjär avbildning med standardmatrisen $\mathbf{P}$.

För spegling gäller

$$\mathbf{x}_r = \left(\mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n}^\mathsf{T}\right)\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}$$

Alltså en linjär avbildning med standardmatrisen $\mathbf{R}$.

Om $d \neq 0$, dvs. planet går *inte* genom origo, har vi

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \alpha\,\mathbf{n} = \mathbf{x} + \frac{d - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\right)\mathbf{x} + \frac{d}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \beta\mathbf{n}$$

Detta är en affin avbildning som vi beskriver med (homogena koordinater)

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \beta\mathbf{n} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ w \end{bmatrix}$$

dvs. med hjälp av matrismultiplikation.

Motsvarande gäller för spegling, då $d \neq 0$.

3 Lärandemål

Efter denna laboration skall du

- kunna projicera och spegla ett objekt i ett plan
- kunna rotera ett objekt runt en godtycklig axel