

## Tillämpning av integraler

### 1 Inledning

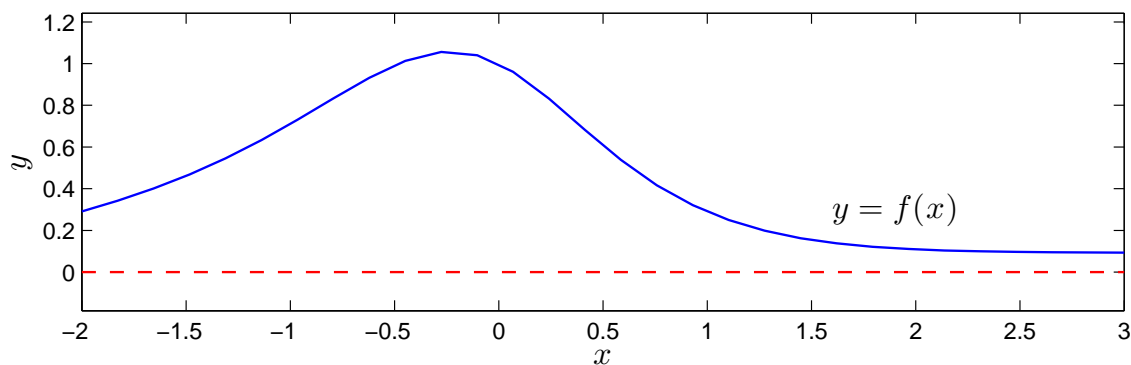
Vi skall se på några tillämpningar av integraler. Först arean och volymen av en rotationskropp sedan längden av en graf och avslutningsvis grafen av en funktion av typen  $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$ .

### 2 Rotationskroppar

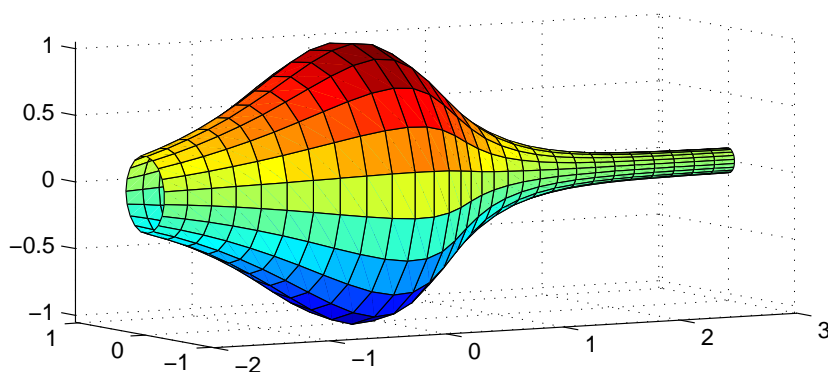
Betrakta kurvan som ger grafen av en funktion  $y = f(x)$  över ett intervall  $a \leq x \leq b$ . Som exempel kan vi ta

$$f(x) = \frac{1 - 0.5 \sin(x)}{1 + x^2}, \quad -2 \leq x \leq 3$$

Så här ser kurvan ut



Låter vi denna kurva rotera runt  $x$ -axeln får vi en rotationsyta



och vi vill beräkna den inneslutna volymen samt rotationsytans area.

Volymen som begränsas av rotationsytan ges av (Adams kapitel 7.1, sid 393)

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

och arean av rotationsytan ges av (Adams kapitel 7.3, sid 409)

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

För vårt exempel nöjer vi oss med en numerisk beräkning av volym  $V$  och ytarea  $S$  enligt

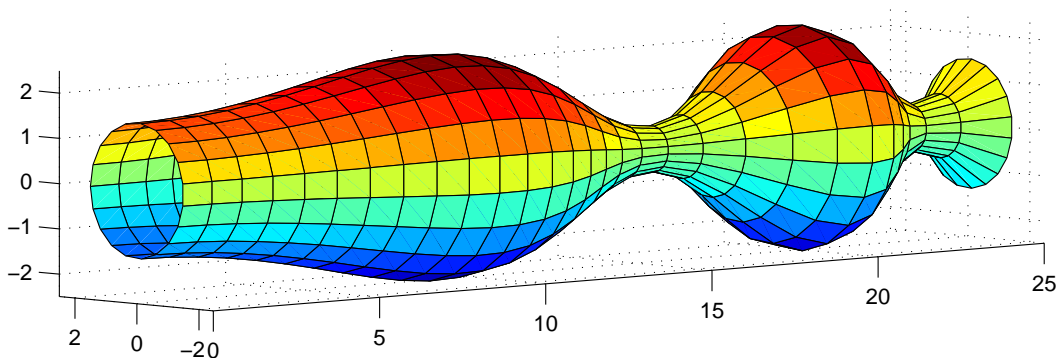
```
>> f=@(x)(1-0.5*sin(x))./(1+x.^2);  
>> Df=@(x)-0.5*cos(x)./(1+x.^2)-(1-0.5*sin(x))*2.*x./(1+x.^2).^2;  
>> a=-2; b=3;  
>> V=pi*integral(@(x)f(x).^2,a,b)  
V =  
    5.1095  
  
>> S=2*pi*integral(@(x)abs(f(x)).*sqrt(1+Df(x).^2),a,b)  
S =  
   16.3260
```

**Uppgift 1.** Beräkna volymen och arean av rotationsytan som bildas då grafen till

$$f(x) = 1.5 + \sin(0.02 x^2), \quad 0 \leq x \leq 25$$

roterar runt  $x$ -axeln.

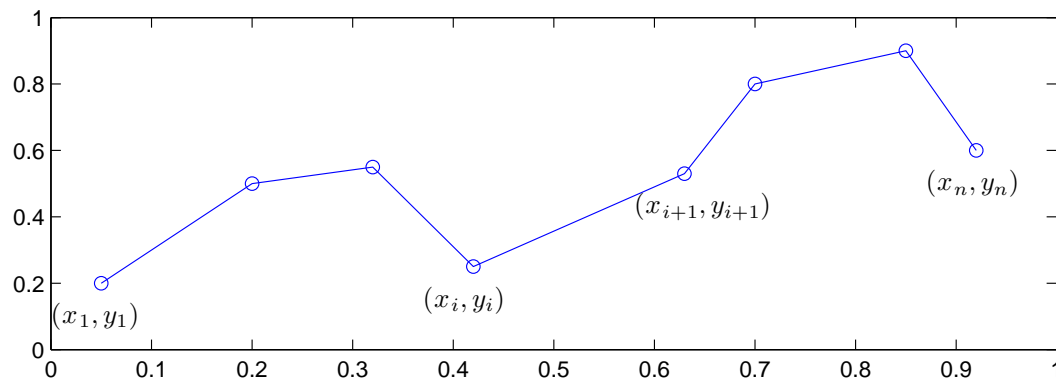
Så här ser ytan ut



Om du vill se koden som genererar ytan kan du titta på funktionen `rotationsyta` som ligger på studiohemsidan (förståelsen får kanske vänta till flervariabelanalysen i läsperiod 3).

### 3 Båglängd

Vi tänker oss att vi har ett polygontåg  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  som vi ritat en figur av



Vill vi beräkna polygontågets längd kan vi göra det med

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

Har vi koordinaterna samlade i två vektorer  $x$  och  $y$  så beräknar vi längden med

```
>> n=length(x);
>> L=0;
>> for i=1:n-1
    L=L+sqrt((x(i+1)-x(i))^2+(y(i+1)-y(i))^2);
end
```

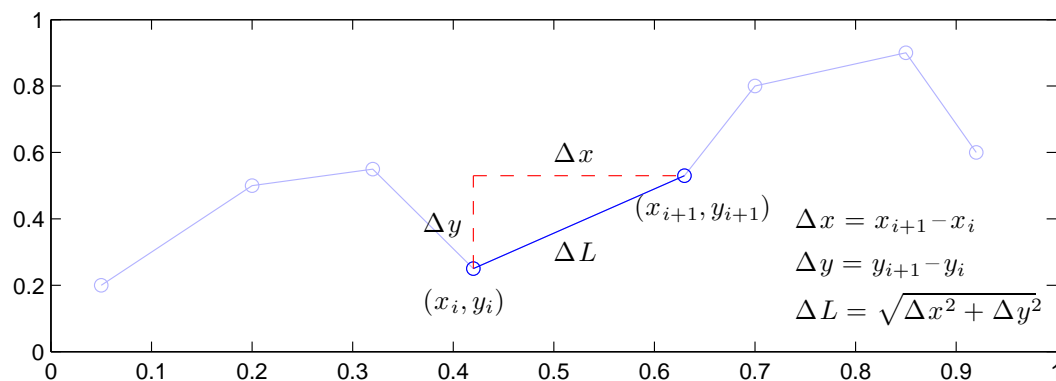
eller lite kortare med s.k. vektorisering

```
>> L=sum(sqrt((x(2:end)-x(1:end-1)).^2+(y(2:end)-y(1:end-1)).^2))
```

alternativt (diff som bildar differensen mellan element i vektorn)

```
>> L=sum(sqrt(diff(x).^2+diff(y).^2))
```

Formeln för  $L$ , som vi tittade på redan i studioövningen "Kontrollstrukturer i MATLAB" i läsperiod 1, fås genom att använda Pytagoras sats på varje segment i polygontåget.



När vi ritar en graf till en funktion  $f(x)$  över ett intervall  $a \leq x \leq b$  är det ett polygontåg  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  vi ritar upp där

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \text{ med } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$$

En approximation av längden av grafen får vi genom att beräkna längden av polygontåget.

Vi skall se vad som händer om vi tar allt fler punkter i polygontåget som beskriver grafen, dvs. vi skall låta  $\Delta x_i \rightarrow 0$  och  $n \rightarrow \infty$ .

Det gäller att

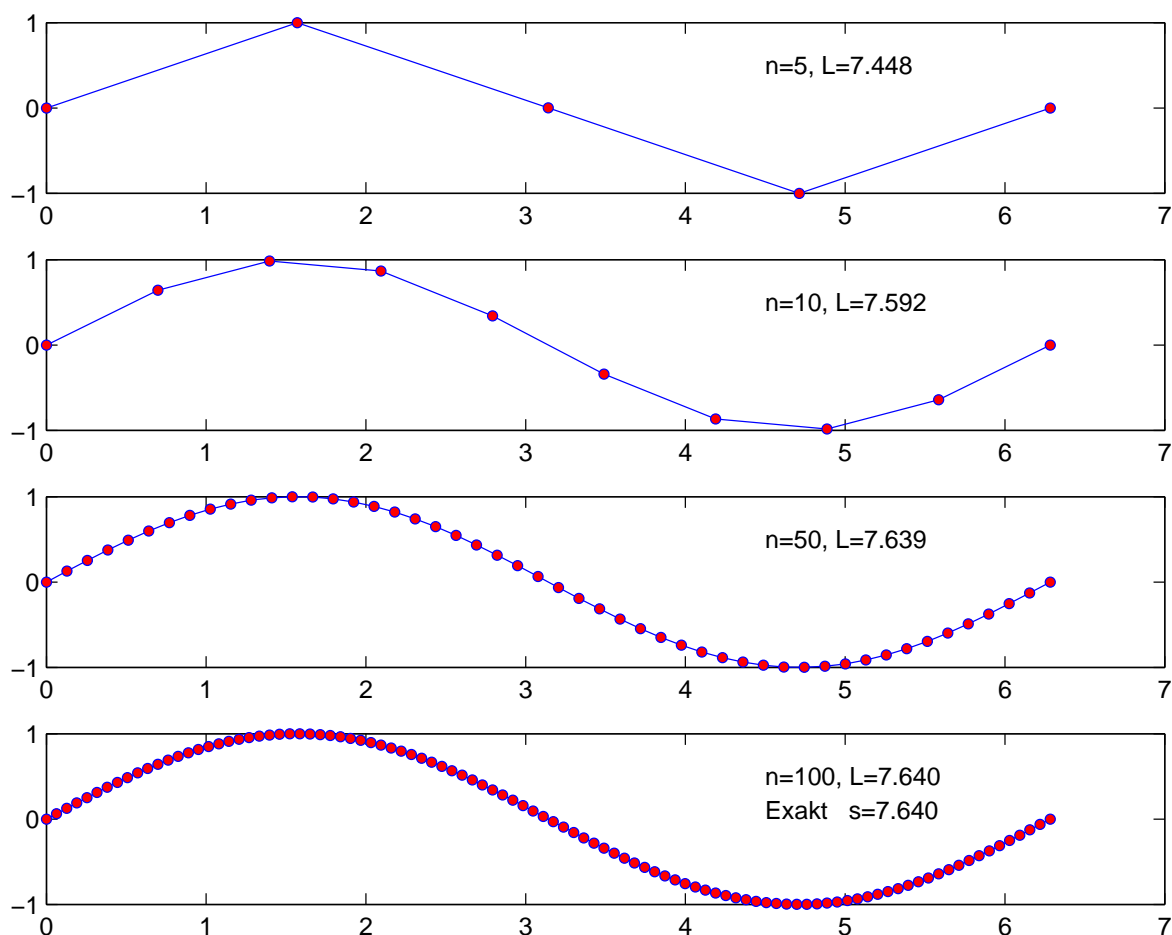
$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2} |x_{i+1} - x_i| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + \left( \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right)^2} \Delta x_i \rightarrow \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \text{ då } n \rightarrow \infty$$

Denna formel hittar ni i Adams kapitel 7.3 sid 405.

Som exempel beräknar vi längden av grafen till  $f(x) = \sin(x)$  över intervallet  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

```
>> n=5;
>> x=linspace(0,2*pi,n);
>> y=sin(x);
>> plot(x,y)
>> L=sum(sqrt(diff(x).^2+diff(y).^2))    % Approximation
>> s=integral(@(x)sqrt(1+cos(x).^2),0,2*pi) % Exakt (dvs. noggrann approximation)
```



Vi ser att vi får konvergens.

**Uppgift 2.** Beräkna längden av grafen till  $f(x) = 1.5 + \sin(0.02x^2)$ ,  $0 \leq x \leq 25$ , dvs. funktionen från uppgift 1. Tag successivt  $n$  allt större. Rita lämpliga figurer.

## 4 Grafen av $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$

Ibland vill man rita grafen av en funktion definierad genom  $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$  över ett intervall  $a \leq x \leq b$ . Om det inte finns någon användbar primitiv funktion till integranden  $g$  är detta en relativt krävande uppgift, för varje  $x$ -värde som behövs för grafen måste vi beräkna  $f(x)$  genom att beräkna en integral.

Man kan i MATLAB beräkna funktionen  $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$  för en parameter  $x$ , som vi kan ge olika värden, enligt

```
>> f=integral(@(t)g(t,x),c,d)
```

Här förutsätts att  $g$  är en funktionsbeskrivning (funktionsfil eller anonym funktion med funktionshandtag) i de två variablerna  $t$  och  $x$ .

Skall vi nu rita en graf av  $f(x)$  över  $a \leq x \leq b$ , så är här strukturen på en skriptfil för detta.

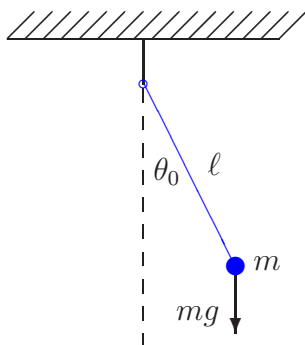
```
g=@(t,x)...;           % Integranden, om vi gör ett funktionshandtag
c=...; d=...;          % Integrationsgränserna
a=...; b=...; n=...;    % Intervallgränser för grafen samt antal punkter
x=linspace(a,b,n);      % x-värdena
f=zeros(size(x));       % Fördimensionering. Skall fylla på integralvärdena

for i=1:length(x)
    f(i)=integral(@(t)g(t,x(i)),c,d); % f(x(i))-värdena
end
plot(x,f)               % Ritar grafen
```

Vi tittar närmare på  $f=zeros(size(x))$ . Här ger  $size(x)$  storleken på radvektorn  $x$ . Därmed ger  $zeros(size(x))$  en radvektor, lika stor som  $x$ , fylld med nollor. Nu kommer  $f$  vara en radvektor av rätt storlek och vi fyller på rätt  $f(x_i)$ -värden i  $for$ -satsen.

Dessa värden, dvs.  $f(x_i) = \int_c^d g(t, x_i) dt$ , beräknas med  $f(i)=integral(@(t)g(t,x(i)),c,d)$  där  $@(t)g(t,x(i))$  en anonym funktion med ett funktionshandtag. Här är  $t$  variabeln och  $g(t, x_i)$  är funktionens värde, där  $x_i$  är ett konstant värde. Vi har alltså en funktion i en variabel  $t$  som  $integral$  kommer integrera.

**Uppgift 3.** Den matematiska pendeln. En masspunkt med massan  $m$  hänger i en viktlös smal stav av längden  $\ell$ .



Vi vill för olika begynnelseutslag  $\theta_0$  bestämma pendelns periodlängd.

Periodlängden ges av formeln

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2(\theta)}}$$

där integralen är en s.k. elliptisk integral som saknar användbar primitiv funktion.

Låt  $\ell = 0.1$  m och tag begynnelseutslagen  $\theta_0 = 10^\circ, 30^\circ, \dots, 170^\circ$ . Beräkna en approximation av periodlängden för de olika begynnelseutslagen. Rita en graf av  $T$  som funktion av  $\theta_0$ . Använd radianer vid integralberäkningarna och dessa skall göras med funktionen `integral`.