

# Differenskvoter

## 1 Inledning

Vi behöver approximera derivator  $u'(x)$ ,  $u''(x)$ ,  $\dots$ , bl.a. i samband med lösning av differential-ekvationer, genom att använda flera funktionsvärden i närheten av  $x$ .

Precis som vid definitionen av derivator kommer vi använda differenskvoter. Då lät vi  $h \rightarrow 0$ , nu kommer vi ta  $h$  som ett litet positivt tal.

## 2 Taylorutveckling

För att se hur noggrann en viss approximation är skall vi använda Taylorutveckling som ni läste om i läsperiod 1 (Adams kapitel 4.3)

$$f(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathcal{O}(h^{n+1})$$

där  $h = x - a$ .

För oss passar det lite bättre att beteckna  $f$  med  $u$  och att skriva  $x$  som  $a + h$ . Då har vi

$$u(a+h) = u(a) + u'(a)h + \frac{u''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{u^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathcal{O}(h^{n+1})$$

Byter vi  $a$  mot  $x$  får vi

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)h + \frac{u''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{u^{(n)}(x)}{n!}h^n + \mathcal{O}(h^{n+1})$$

och då har vi den variant som passar oss i nästa avsnitt.

## 3 Första derivator

Inför *framåt-* och *bakåt*differenskvoterna

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad D_-u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

Låter vi  $h \rightarrow 0$  så får vi derivatan  $u'(x)$ . Tar vi  $h$  som ett litet positivt tal så får vi en approximation av derivatan. Hur bra är denna?

Vi skall visa att

$$u'(x) = D_+u(x) + \mathcal{O}(h), \quad u'(x) = D_-u(x) + \mathcal{O}(h)$$

dvs. om vi halverar  $h$  så halveras felet.

Taylorutveckling av  $u(x)$  ger

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) + \dots \quad (1)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) - \dots \quad (2)$$

Från (1) får vi direkt

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2}u''(x) + \dots = u'(x) + \mathcal{O}(h)$$

och från (2) får vi

$$D_-u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x) - \frac{h}{2}u''(x) + \dots = u'(x) + \mathcal{O}(h)$$

Även *centraldifferenskvoten*

$$D_0u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

är en approximation av derivatan  $u'(x)$ .

Genom subtraktion av (1) med (2) kan man se att

$$u'(x) = D_0u(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Vi ser att  $D_0u(x)$  är noggrannare än  $D_+u(x)$  och  $D_-u(x)$ . Vid behov kan man med Taylorutveckling ta fram ännu noggrannare differenskvoter.

## 4 Högre ordningens derivator

Vi kan approximera andra derivatan  $u''(x)$  med

$$D_+D_-u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

Addition av (1) med (2) ger

$$u''(x) = D_+D_-u(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Vidare kan vi approximera  $u'''(x) = u^{(3)}(x)$  med

$$\frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + 2u(x-h) - u(x-2h)}{2h^3}$$

samt  $u''''(x) = u^{(4)}(x)$  med

$$\frac{u(x+2h) - 4u(x+h) + 6u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)}{h^4}$$

och får noggrannheten  $\mathcal{O}(h^2)$  även i dessa fall.