

Tillämpning av integraler

1 Inledning

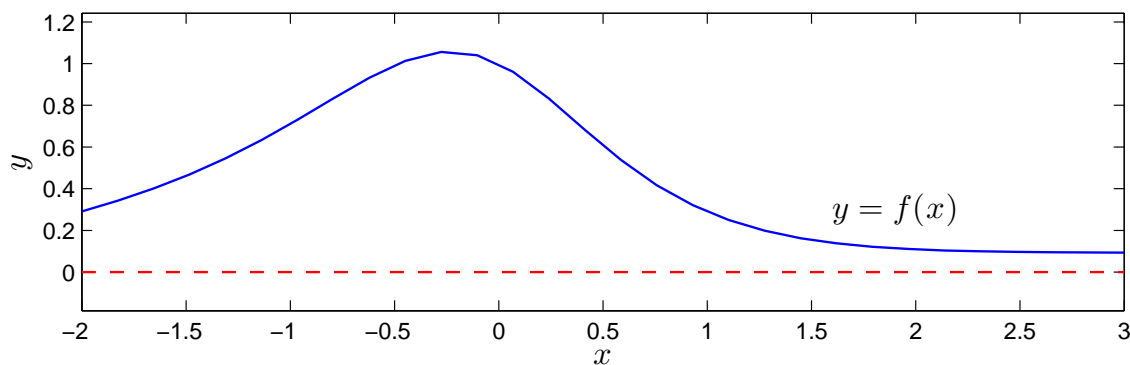
Vi skall se på några tillämpningar av integraler. Först arean och volymen av en rotationskropp sedan längden av en graf och avslutningsvis grafen av en funktion av typen $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$.

2 Rotationskroppar

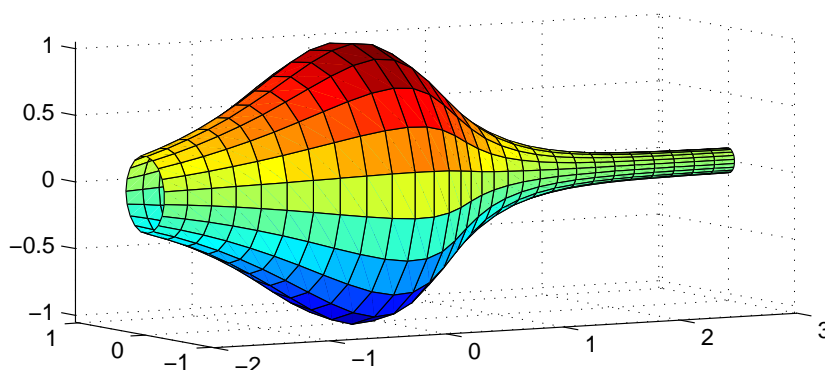
Betrakta kurvan som ger grafen av en funktion $y = f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$. Som exempel kan vi ta

$$f(x) = \frac{1 - 0.5 \sin(x)}{1 + x^2}, \quad -2 \leq x \leq 3$$

Så här ser kurvan ut



Låter vi denna kurva rotera runt x -axeln får vi en rotationsyta



och vi vill beräkna den inneslutna volymen samt rotationsytans area.

Volymen som begränsas av rotationsytan ges av (Adams kapitel 7.1, sid 393)

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

och arean av rotationsytan ges av (Adams kapitel 7.3, sid 409)

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

För vårt exempel nöjer vi oss med en numerisk beräkning av volym V och ytarea S enligt

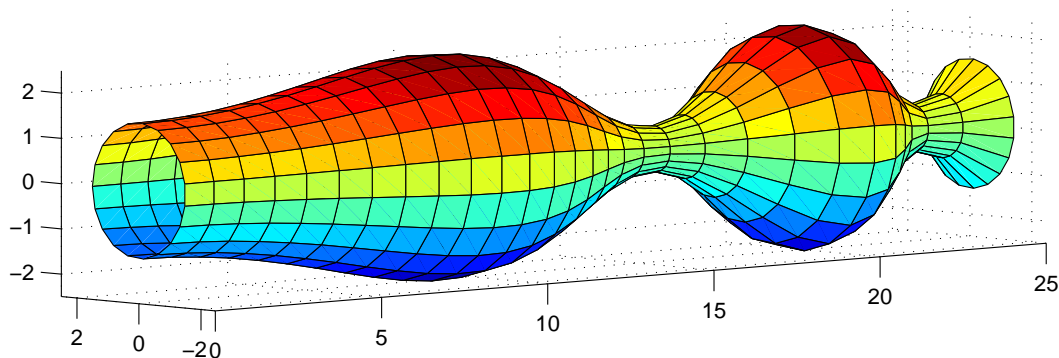
```
>> f=@(x)(1-0.5*sin(x))./(1+x.^2);  
>> Df=@(x)-0.5*cos(x)./(1+x.^2)-(1-0.5*sin(x))*2.*x./(1+x.^2).^2;  
>> a=-2; b=3;  
>> V=pi*integral(@(x)f(x).^2,a,b)  
V =  
    5.1095  
  
>> S=2*pi*integral(@(x)abs(f(x)).*sqrt(1+Df(x).^2),a,b)  
S =  
   16.3260
```

Uppgift 1. Beräkna volymen och arean av rotationsytan som bildas då grafen till

$$f(x) = 1.5 + \sin(0.02 x^2), \quad 0 \leq x \leq 25$$

roterar runt x -axeln.

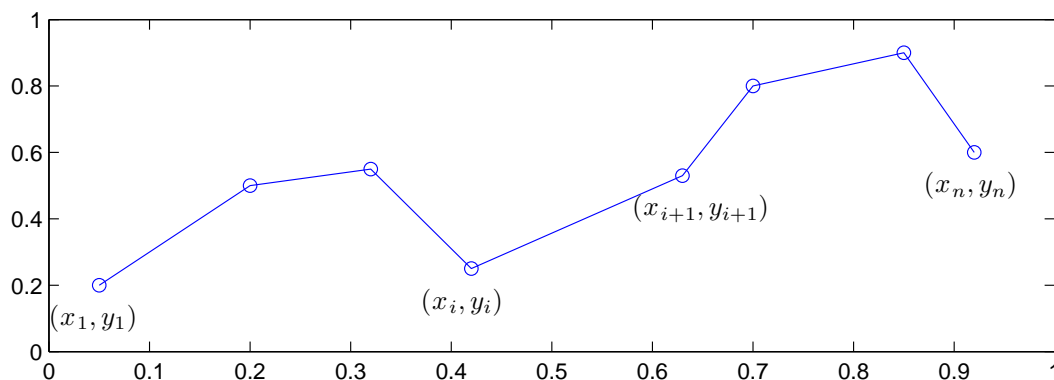
Så här ser ytan ut



Om du vill se koden som genererar ytan kan du titta på funktionen `rotationsyta` som ligger på studiohemsidan (förståelsen får kanske vänta till flervariabelanalysen i läsperiod 3).

3 Båglängd

Vi tänker oss att vi har ett polygontåg $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ som vi ritat en figur av



Vill vi beräkna polygontågets längd kan vi göra det med

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

Har vi koordinaterna samlade i två vektorer x och y så beräknar vi längden med

```
>> n=length(x);
>> L=0;
>> for i=1:n-1
    L=L+sqrt((x(i+1)-x(i))^2+(y(i+1)-y(i))^2);
end
```

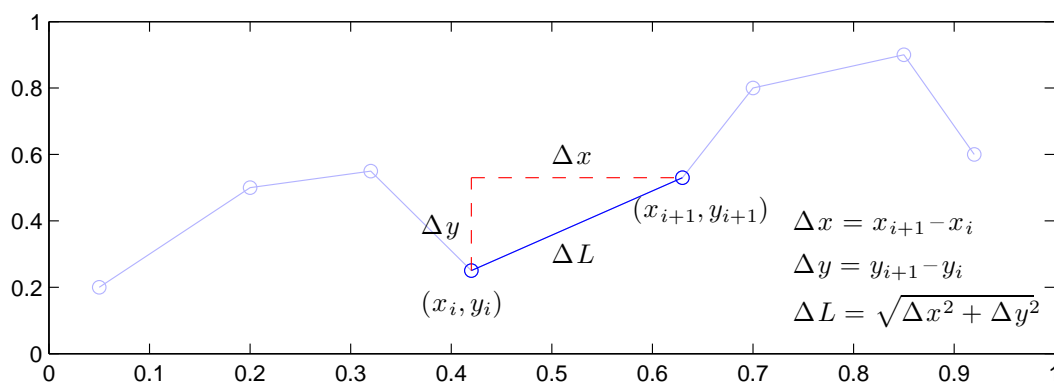
eller lite kortare med s.k. vektorisering

```
>> L=sum(sqrt((x(2:end)-x(1:end-1)).^2+(y(2:end)-y(1:end-1)).^2))
```

alternativt (diff som bildar differensen mellan element i vektorn)

```
>> L=sum(sqrt(diff(x).^2+diff(y).^2))
```

Formeln för L , som vi tittade på redan i studioövningen "Kontrollstrukturer i MATLAB" i läsperiod 1, fås genom att använda Pytagoras sats på varje segment i polygontåget.



När vi ritar en graf till en funktion $f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$ är det ett polygontåg $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ vi ritar upp där

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad \text{med } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$$

En approximation av längden av grafen får vi genom att beräkna längden av polygontåget.

Vi skall se vad som händer om vi tar allt fler punkter i polygontåget som beskriver grafen, dvs. vi skall låta $\Delta x_i \rightarrow 0$ och $n \rightarrow \infty$.

Det gäller att

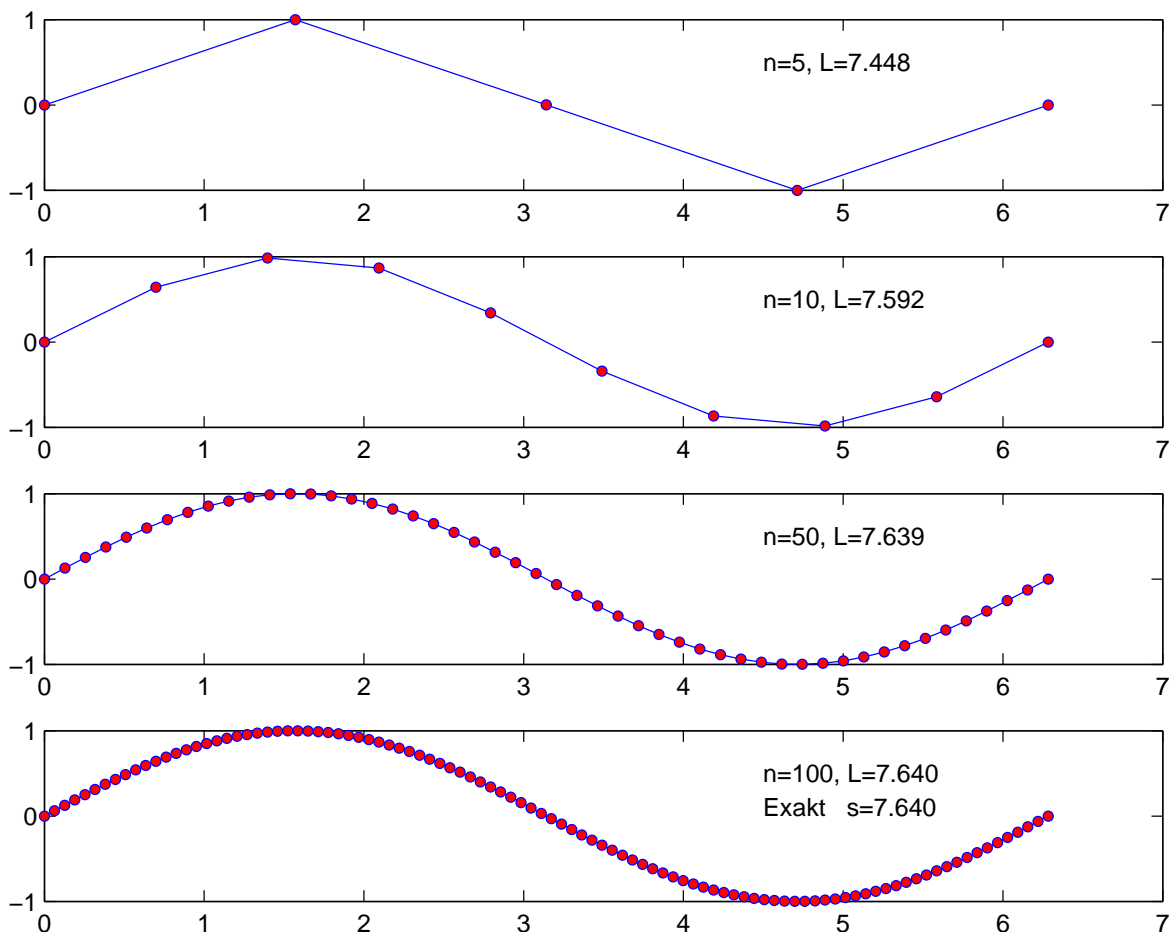
$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2} |x_{i+1} - x_i| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2} \Delta x_i \rightarrow \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \text{ då } n \rightarrow \infty$$

Denna formel hittar ni i Adams kapitel 7.3 sid 405.

Som exempel beräknar vi längden av grafen till $f(x) = \sin(x)$ över intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$.

```
>> n=5;
>> x=linspace(0,2*pi,n);
>> y=sin(x);
>> plot(x,y)
>> L=sum(sqrt(diff(x).^2+diff(y).^2))    % Approximation
>> s=integral(@(x)sqrt(1+cos(x).^2),0,2*pi) % Exakt (dvs. noggrann approximation)
```



Vi ser att vi får konvergens.

Uppgift 2. Beräkna längden av grafen till $f(x) = 1.5 + \sin(0.02x^2)$, $0 \leq x \leq 25$, dvs. funktionen från uppgift 1. Tag successivt n allt större. Rita lämpliga figurer.

4 Grafen av $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$

Ibland vill man rita grafen av en funktion definierad genom $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$ över ett intervall $a \leq x \leq b$. Om det inte finns någon användbar primitiv funktion till integranden g är detta en relativt krävande uppgift, för varje x -värde som behövs för grafen måste vi beräkna $f(x)$ genom att beräkna en integral.

Man kan i MATLAB beräkna funktionen $f(x) = \int_c^d g(t, x) dt$ för en parameter x , som vi kan ge olika värden, enligt

```
>> f=integral(@(t)g(t,x),c,d)
```

Här förutsätts att g är en funktionsbeskrivning (funktionsfil eller anonym funktion med funktionshandtag) i de två variablerna t och x .

Skall vi nu rita en graf av $f(x)$ över $a \leq x \leq b$, så är här strukturen på en skriptfil för detta.

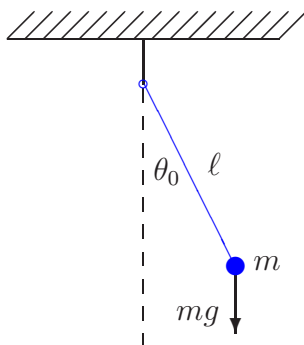
```
g=@(t,x)...;           % Integranden, om vi gör ett funktionshandtag
c=...; d=...;         % Integrationsgränserna
a=...; b=...; n=...;  % Intervallgränser för grafen samt antal punkter
x=linspace(a,b,n);    % x-värdena
f=zeros(size(x));     % Fördimensionering. Skall fylla på integralvärdena

for i=1:length(x)
    f(i)=integral(@(t)g(t,x(i)),c,d); % f(x(i))-värdena
end
plot(x,f)             % Ritar grafen
```

Vi tittar närmare på $f=zeros(size(x))$. Här ger $size(x)$ storleken på radvektorn x . Därmed ger $zeros(size(x))$ en radvektor, lika stor som x , fylld med nollor. Nu kommer f vara en radvektor av rätt storlek och vi fyller på rätt $f(x_i)$ -värden i for -satsen.

Dessa värden, dvs. $f(x_i) = \int_c^d g(t, x_i) dt$, beräknas med $f(i)=integral(@(t)g(t,x(i)),c,d)$ där $@(t)g(t,x(i))$ en anonym funktion med ett funktionshandtag. Här är t variabeln och $g(t, x_i)$ är funktionens värde, där x_i är ett konstant värde. Vi har alltså en funktion i en variabel t som $integral$ kommer integrera.

Uppgift 3. Den matematiska pendeln. En masspunkt med massan m hänger i en viktlös smal stav av längden ℓ .



Vi vill för olika begynnelseutslag θ_0 bestämma pendelns periodlängd.

Periodlängden ges av formeln

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2(\theta)}}$$

där integralen är en s.k. elliptisk integral som saknar användbar primitiv funktion.

Låt $\ell = 0.1$ m och tag begynnelseutslagen $\theta_0 = 10^\circ, 30^\circ, \dots, 170^\circ$. Beräkna en approximation av periodlängden för de olika begynnelseutslagen. Rita en graf av T som funktion av θ_0 . Använd radianer vid integralberäkningarna och dessa skall göras med funktionen `integral`.