Dubbelintegraler

1 Inledning

Vi skall börja med att approximera dubbelintegralen av en funktion över ett enkelt rektangulärt område

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

där $R = \{(x,y)\colon\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Sedan skall vi se på allmännare områden.

Enkelintegraler approximerade vi redan i envariabelanalysen och vi skall för dubbelintegraler använda samma typ av approximationer. Då beskrev vi vänster och höger rektangelregel, mittpunktsregeln och trapetsregeln. Samtliga dessa metoder för enkelintegralen kan generaliseras till multipelintegraler, men vi kommer nöja oss med att titta på dubbelintegraler.

2 Rektangelregeln

I en studioövning i förra läsperioden betraktade vi enkelintegralen över ett intervall

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

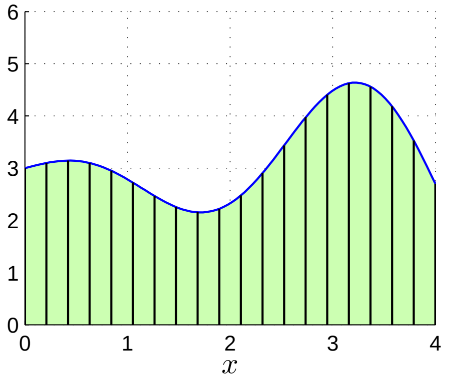
Vi gjorde en likformig indelning av intervallet $a \le x \le b$ enligt

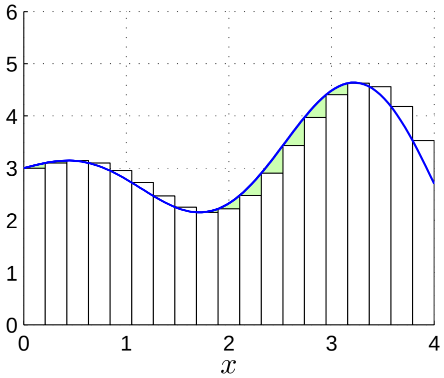
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

så att vi fick n lika långa delintervall $x_{i-1} \le x \le x_i$ med samma bredd $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$.

Vi approximerade $f(x)$ med $f(x_{i-1})$ i intervallen $x_{i-1} \le x \le x_i$ och fick *vänster rektangelregel*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$





Nu skall vi upprepa samma resonemang för dubbelintegralen

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

där $R = \{(x, y)\colon\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$.

Förutom indelning av intervallet $a \le x \le b$, gör vi nu även en likformig indelning av intervallet $c \le y \le d$ enligt

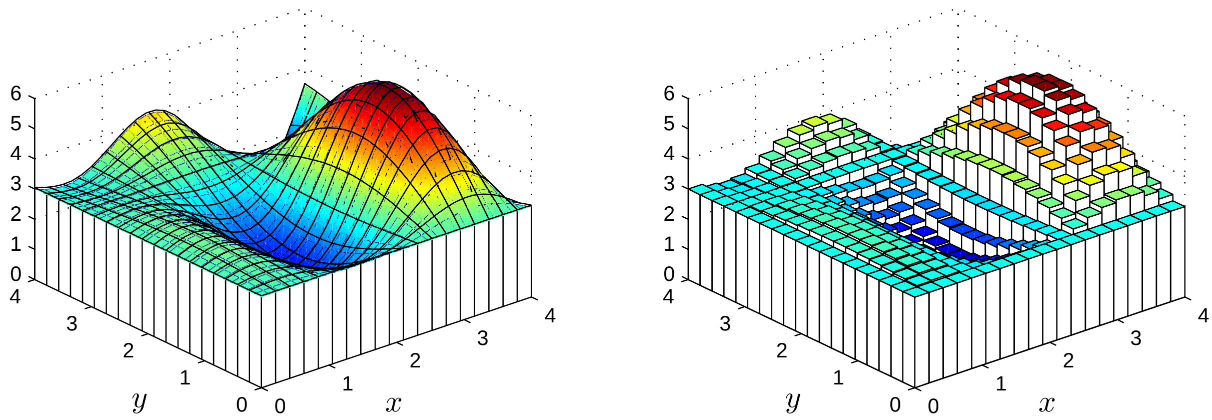
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$$

så att vi får m lika långa delintervall $y_{j-1} \le y \le y_j$ med samma bredd $k = \frac{d-c}{m}$.

Vi får därmed en indelning av området $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ i nm stycken likformiga små rektanglar som har arean $\Delta A = hk$ var och en.

Om vi approximerar $f(x, y)$ med $f(x_{i-1}, y_{j-1})$ på området $x_{i-1} \le x \le x_i$, $y_{j-1} \le y \le y_j$, får vi **vänster rektangelregel** för dubbelintegralen

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y)\, dA &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \iint_{R_{i,j}} f(x, y)\, dA \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_{i-1}, y_{j-1})\, \Delta A\end{aligned}$$



Vi approximerar varje liten delintegral med volymen av ett rätblock vars bas har arean hk och som har höjden $f(x_{i-1}, y_{j-1})$ och sedan summerar vi alla bidragen.

Om vi istället approximerar $f(x, y)$ med $f(x_i, y_j)$ får vi **höger rektangelregel** för dubbelintegralen

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y)\, dA &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \iint_{R_{i,j}} f(x, y)\, dA \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\, \Delta A\end{aligned}$$

Slutligen så får vi ett betydligt noggrannare resultat med **mittpunktsregeln**, där vi beräknar höjden mittpunkten i varje delrektangel, och **trapetsregeln** som vi får genom att ta medelvärdet av höjderna (funktionsvärdena) i alla fyra hörnpunkterna i varje delrektangel.

Uppgift 1. Beräkna i MATLAB en approximation av enkelintegralen

$$\int_0^1 x\,\sin(x)\,dx$$

med vänster och höger rektangelregel samt trapetsregeln. Använd funktionen `sum` i MATLAB för att få en enklare kod än om man använder `for`-satser.

Uppgift 2. Beräkna nu i MATLAB en approximation av dubbelintegralen

$$\iint_R y\,\sin(y+xy)\,dA$$

där $R = \{(x,y)\colon\ 0 \le x \le 1,\ -\pi/2 \le y \le \pi/2\}$.

Använd vänster och höger rektangelregel samt trapetsregeln. Jämför deras noggrannhet genom att räkna ut det exakta värdet av dubbelintegralen för hand. (Alla elementen i en matris summeras genom att man tar `sum` av `sum`.)

3 Kvadraturprogram i MATLAB

I MATLAB finns t.ex. `integral` för beräkning av enkelintegraler samt `integral2` och `integral3` för beräkning av dubbelintegraler respektive trippelintegraler.

Vi skall som exempel beräkna dubbelintegralen

$$\iint_R y\,\sin(x) + x\,\cos(y)\,dA$$

där $R = \{(x,y)\colon\ \pi \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le \pi\}$.

Beskriv alltid integranden som om du skulle rita dess funktionsyta, dvs. tänk på `x` och `y` som matriser och använd komponentvisa operationer. Beräkningen utförs enligt

```
>> f=@(x,y)y.*sin(x)+x.*cos(y);
>> q=integral2(f,pi,2*pi,0,pi)
```

Som ytterligare ett exempel tar vi

$$\iint_D x^2\cos(y^3) - 3\sin(y)\,dA$$

där $D = \{(x,y) :\ |x| + |y| \le 1\}$.

Området kan beskrivas $-1 \le x \le 1$, $c(x) \le y \le d(x)$, där $c(x) = |x| - 1$ och $d(x) = 1 - |x|$.

Så här utför vi beräkningen i MATLAB:

```
>> f=@(x,y)x.^2.*cos(y.^3)-3*sin(y);
>> a=-1; b=1; c=@(x)abs(x)-1; d=@(x)1-abs(x);
>> q=integral2(f,a,b,c,d)
```

Integrationsgränserna i y-led kan ges av två funktioner, medan integrationsgränserna i x-led måste ges av två tal.

Uppgift 3. Vi skall beräkna integralen

$$\iint_R x\,\mathrm{e}^{xy}\,dA$$

där $R = \{(x,y)\colon\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$.

Rita först funktionsytan till integranden över aktuellt område. Använd sedan `integral2` för att beräkna integralen. Jämför gärna med exakt värde som du i så fall räknar ut för hand och jämför gärna med vad rektangel- och trapetsreglerna ger.

Uppgift 4. Vi skall se på integralen (Exempel 4, Adams 14.2)

$$\iint_D (a - x + y)\,dA$$

där $D = \{(x,y)\colon\ 0 \le y \le a - \frac{x^2}{a}\}$.

Läs exemplet i boken och beräkna integralen med `integral2`. Jämför med bokens exakta svar.