Linjära ekvationssystem

1 Inledning

Denna studioövning börjar med att vi påminner oss om matriser i MATLAB samtidigt som vi börjar se på matriser i matematiken. Sedan ser vi på uppbyggnad av matriser samt matrismultiplikation. Avslutningsvis ser vi på linjära ekvationssystem.

2 Matriser

En matris är som ni vet ett rektangulärt talschema:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrisen ovan har m rader och n kolonner, vi säger att den är av typ $m \times n$. Ett matriselement i rad nr i, kolonn nr j tecknas a_{ij}, där i är radindex och j är kolonnindex. I MATLAB skrivs detta `A(i,j)` och `[m,n]=size(A)` ger matrisens typ, medan `m=size(A,1)` ger endast antal rader och `n=size(A,2)` ger endast antal kolonner.

Indexeringen i är alltid som i matrisen ovan, dvs. rad- och kolonnindex börjar alltid på ett och vi kan inte ändra på det.

En matris av typ $m \times 1$ kallas kolonnmatris (kolonnvektor) och en matris av typ $1 \times n$ kallas radmatris (radvektor):

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Du kommer att se att vi använder oftast kolonnvektorer för att representera kvantiteter som vi beräknar. Element nr i ges i MATLAB av `b(i)` och antalet element ges av `m=length(b)`. Även för vektorer gäller att indexeringen alltid börjar på ett. Motsvarande gäller för radvektorn $\mathbf{c}$.

Som exempel tar vi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Vi skriver in detta i MATLAB enligt

```
>> A=[1 4 7 10; 2 5 8 11; 3 6 9 12]
>> b=[1; 3; 5]
>> c=[0 2 4]
```

och ser på typerna och några element med

```
>> [m,n]=size(A)
m =
     3
n =
     4

>> A(2,3)
ans =
     8
```

Prova gärna `length` och `size` på `b` och `c`. Någon skillnad? Skriv ut något element också.

En matris kan betraktas som en kollektion av kolonner:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

med kolonnerna

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Man kan även betrakta den som en kollektion av rader, men vi använder oftast kolonnrepresentationen. I MATLAB plockar man ut kolonn nr j med `A(:,j)`. Här är j kolonnindex medan radindex $i = 1, \ldots, m$ representeras av tecknet kolon `:`. På liknande vis ges rad nr i av `A(i,:)`.

```
>> a1=A(:,1)
a1 =
     1
     2
     3

>> A2=A(2,:)
A2 =
     2     5     8    11
```

Uppgift 1. Skriv in följande matriser i MATLAB.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(a). Skriv ut matriselementen a_{23}, b_{23}, c_2 och d_3. Prova `size` och `length` på $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$. Ändra b_{23} genom att skriva `B(2,3)=5`.

(b). Skriv ut kolonn nr 1, 2 och 3 ur matrisen $\mathbf{A}$. Sätt in kolonnvektorn $\mathbf{c}$ som 2:a kolonn i $\mathbf{A}$ genom att skriva `A(:,2)=c`.

(c). Radera matrisen $\mathbf{B}$ (`clear B`) och skriv in den igen genom att först bilda kolonnerna

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och sedan sätta in dem i matrisen $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]$.

Vi kan ta ut ett block ur en matris med `A(iv,jv)` där `iv` är en vektor med radindex och `jv` är en vektor med kolonnindex. Resultatet blir en matris med `length(iv)` rader och `length(jv)` kolonner.

```
>> A=[1 3 5; 7 9 11; 2 4 6]
A =
     1     3     5
     7     9    11
     2     4     6
```

```
>> B=A([2 3],[1 3])
B =
     7    11
     2     6
```

Transponatet $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ av en matris $\mathbf{A}$ ges av apostrof (`'`).

```
>> A=[1 3 5; 7 9 11]
A =
     1     3     5
     7     9    11
```

```
>> B=A'
B =
     1     7
     3     9
     5    11
```

Uppgift 2. Låt som i uppgift 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(a). Sätt in kolonnvektorn $\mathbf{c}$ som 3:e kolonn i $\mathbf{A}$ och sätt in radvektorn $\mathbf{d}$ som 2:a rad i $\mathbf{B}$.

(b). Låt 1:a och 4:e raden i $\mathbf{A}$ byta plats och låt därefter den 2:a och 3:e kolonnen byta plats.

3 Bygga upp matriser

Med funktionerna `zeros` och `ones` kan man i MATLAB bilda matriser med nollor och ettor. Exempelvis `zeros(m,n)` ger en matris av storleken $m \times n$ fylld med nollor. Med `zeros(size(A))` får vi en matris fylld med nollor av samma storlek som `A`. Motsvarande gäller för `ones`.

Enhetsmatriser bildas med funktionen `eye`, med `eye(n)` får vi enhetsmatrisen av storleken $n \times n$. Man kan också använda `eye` för att bilda rektangulära matriser med ettor på huvuddiagonalen och nollor för övrigt. Med `eye(m,n)` får vi en sådan matris av storleken $m \times n$ och med `eye(size(A))` får vi en av samma storlek som `A`.

Med `diag` bildas diagonalmatriser. En vektor kan läggas in på en viss diagonal enligt

```
>> d=[2 3 7];
>> A=diag(d,0) % eller A=diag(d)
A =
     2     0     0
     0     3     0
     0     0     7
```

```
>> d=[2 3 7];
>> A=diag(d,1)
A =
     0     2     0     0
     0     0     3     0
     0     0     0     7
     0     0     0     0
```

Huvuddiagonalen markeras med `0`, diagonalen ovanför till höger med `1`, diagonalen nedanför till vänster med `-1`, osv. Matrisen blir så stor att vektorns alla element får plats längs angiven diagonal.

Vi kan sätta ihop två matriser `A` och `B` horisontellt med `[A B]` om antal rader i de två matriserna är lika. Två matriser `A` och `B` kan sättas ihop vertikalt med `[A; B]` om antal kolonner i de två matriserna är lika.

4 Linjärt ekvationssystem

Matriser används bland annat för att skriva ned linjära ekvationssystem. Vi tar som exempel: Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 7x_1 + 8x_2 = 23 \end{cases}$$

kan skrivas på matrisform

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 23 \end{bmatrix},$$

dvs.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \text{med } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Vi bildar koefficientmatrisen $\mathbf{A}$ och högerledsvektorn $\mathbf{b}$ med

```
>> A=[1 2 3;3 2 1;7 8 0]
A =
     1     2     3
     3     2     1
     7     8     0

>> b=[14;10;23]
b =
    14
    10
    23
```

Med kommandot `rref` kommer vi till radreducerad trappstegsform (row-reduced-echelon form) så att vi kan läsa av lösningen till $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Först bildar vi den utökade matrisen $\mathbf{E} = [\,\mathbf{A}\ \mathbf{b}\,]$ med

```
>> E=[A b]
E =
     1     2     3    14
     3     2     1    10
     7     8     0    23
```

och sedan får vi den reducerade matrisen med

```
>> R=rref(E)
R =
     1     0     0     1
     0     1     0     2
     0     0     1     3
```

Lösningen ser vi i sista kolonnen i `R` och vi har

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Som ytterligare ett exempel ser vi på följande ekvationssystem med oändligt många lösningar

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 46 \end{cases}$$

eller på matrisform

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ 46 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[1 2 3;3 2 1;7 8 9]
A =
     1     2     3
     3     2     1
     7     8     9

>> b=[10;14;46]
b =
    10
    14
    46
```

Vi reducerar utökande matrisen med

```
>> R=rref([A b])
R =
     1     0    -1     2
     0     1     2     4
     0     0     0     0
```

Vi har en fri variabel. Om vi sätter $x_3 = t$ får vi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+t \\ 4-2t \\ t \end{bmatrix}$$

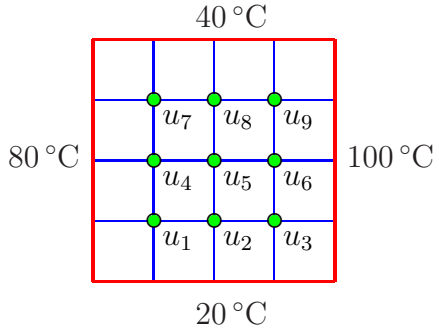
där t är ett godtyckligt reellt tal.

Uppgift 3. Skriv följande ekvationssystem på matrisform och lös dem sedan med `rref`.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 29 \\ 2x_1 + 5x_3 = 26 \\ 3x_1 + 7x_2 + 11x_3 = 39 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Skulle det finnas oändligt många lösningar skriv upp en formel för samtliga lösningar.

Uppgift 4. Vi skall beräkna temperaturen på en stålplatta där plattans kanter hålls vid temperaturer enligt figuren.



Antag att temperaturen i en nodpunkt är medelvärdet av temperaturena i de närmsta nodpunkterna i *väster*, *öster*, *söder* och *norr*. Låt $u_1, u_2, \cdots, u_9$ beteckna temperaturerna i de olika nodpunkterna. Sätt upp de ekvationer som ger temperaturen i de olika nodpunkterna. Skriv det linjära ekvationssystemet på matrisform $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ och lös detta i MATLAB.