Differenskvoter

1 Inledning

Vi behöver approximera derivator $u'(x)$, $u''(x)$, $\cdots$, bl.a. i samband med lösning av differentialekvationer, genom att använda flera funktionsvärden i närheten av x.

Precis som vid definitionen av derivator kommer vi använda differenskvoter. Då lät vi $h \to 0$, nu kommer vi ta h som ett litet positivt tal.

2 Taylorutveckling

För att se hur noggrann en viss approximation är skall vi använda Taylorutveckling som ni läste om i läsperiod 1 (Adams kapitel 4.3)

$$f(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathcal{O}(h^{n+1})$$

där $h = x - a$.

För oss passar det lite bättre att beteckna f med u och att skriva x som $a + h$. Då har vi

$$u(a+h) = u(a) + u'(a)h + \frac{u''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathcal{O}(h^{n+1})$$

Byter vi a mot x får vi

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)h + \frac{u''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}(x)}{n!}h^n + \mathcal{O}(h^{n+1})$$

och då har vi den variant som passar oss i nästa avsnitt.

3 Första derivator

Inför *framåt-* och *bakåtdifferenskvoterna*

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad D_-u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

Låter vi $h \to 0$ så får vi derivatan $u'(x)$. Tar vi h som ett litet positivt tal så får vi en approximation av derivatan. Hur bra är denna?

Vi skall visa att

$$u'(x) = D_+u(x) + \mathcal{O}(h), \quad u'(x) = D_-u(x) + \mathcal{O}(h)$$

dvs. om vi halverar h så halveras felet.

Taylorutveckling av $u(x)$ ger

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) + \cdots \tag{1}$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) - \cdots \tag{2}$$

Från (1) får vi direkt

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2}u''(x) + \cdots = u'(x) + \mathcal{O}(h)$$

och från (2) får vi

$$D_-u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x) - \frac{h}{2}u''(x) + \cdots = u'(x) + \mathcal{O}(h)$$

Även *centraldifferenskvoten*

$$D_0u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

är en approximation av derivatan $u'(x)$.

Genom subtraktion av (1) med (2) kan man se att

$$u'(x) = D_0u(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Vi ser att $D_0u(x)$ är noggrannare än $D_+u(x)$ och $D_-u(x)$. Vid behov kan man med Taylorutveckling ta fram ännu noggrannare differenskvoter.

4 Högre ordningens derivator

Vi kan approximera andra derivatan $u''(x)$ med

$$D_+D_-u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

Addition av (1) med (2) ger

$$u''(x) = D_+D_-u(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Vidare kan vi approximera $u'''(x) = u^{(3)}(x)$ med

$$\frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + 2u(x-h) - u(x-2h)}{2h^3}$$

samt $u''''(x) = u^{(4)}(x)$ med

$$\frac{u(x+2h) - 4u(x+h) + 6u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)}{h^4}$$

och får noggrannheten $\mathcal{O}(h^2)$ även i dessa fall.