

Linjära system av differentialekvationer

1 Inledning

Vi har i studioövning 3 sett på allmänna system av differentialekvationer med begynnelsevillkor

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), & a \leq t \leq b \\ \mathbf{u}(a) = \mathbf{u}_a \end{cases}$$

Vi har också lärt oss att lösa dem i MATLAB med Euler framåtmetoden eller t.ex. `ode45`. I den här studioövningen kommer vi se på allmänna *linjära system* av differentialekvationer

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), & a \leq t \leq b \\ \mathbf{u}(a) = \mathbf{u}_a \end{cases} \quad (1)$$

där \mathbf{A} är en konstant $n \times n$ -matris. Sambandet mellan \mathbf{f} och matrisen \mathbf{A} ges av

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

Det är enkelt att lösa system (1) i MATLAB enligt

```
>> f=@(t,u)A*u  
>> [t,U]=ode45(f,[a,b],ua)
```

Till skillnad från de flesta icke-linjära system så kan vi lösa de linjära analytiskt (dvs. exakt) med *egenvärdesmetoden*, se Lay kapitel 5.7.

2 Riktningsfält och fasporträtt

Precis som för allmänna system får vi en bättre uppfattning av vilka egenskaper systemet (1) har genom att se närmare på högerledet $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$.

För varje begynnelsevärde till (1) så har vi en lösning $\mathbf{u}(t)$. Från differentialekvationen har vi $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$. Vektorfältet \mathbf{f} ger oss i varje punkt \mathbf{u} den riktning i vilken lösningen förändras och dess längd ger förändringstakten. Genom att i ett lämpligt antal punkter \mathbf{u} markera styrka och riktning för vektorn $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ med en pil så får vi, som i studioövning 3, ett *riktningsfält*.

Genom att rita upp detta riktningsfält får vi ungefärlig information om hur lösningen $\mathbf{u}(t)$ till ekvationen beter sig för samtliga möjliga startvärden.

Tidigare har vi ju främst ritat ut graferna för koordinatfunktionerna $u_1(t)$ och $u_2(t)$, men det är också naturligt att visualisera lösningen i ett *fasporträtt* där vi ritar $u_1(t)$ mot $u_2(t)$. Det blir extra intressant att rita in en sådan kurva (bana) i ett riktningsfält.

Som exempel på ett linjärt system tar vi (Lay, Exempel 2, kapitel 5.7)

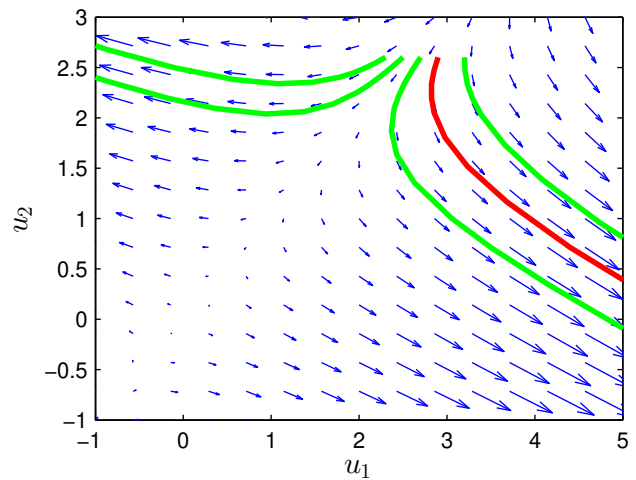
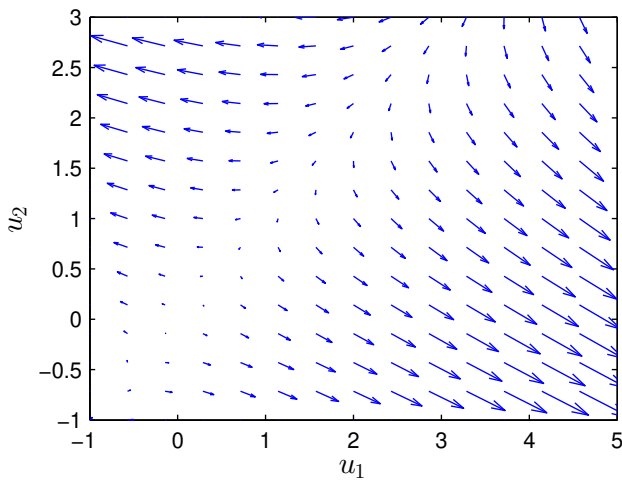
$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), & 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

Vi ritar riktningsfältet

```
>> A=[4 -5;-2 1];
>> u1=linspace(-1,5,20);u2=linspace(-1,3,20);
>> [U1,U2]=meshgrid(u1,u2);
>> F1=A(1,1)*U1+A(1,2)*U2;
>> F2=A(2,1)*U1+A(2,2)*U2;
>> quiver(U1,U2,F1,F2,1.5)
>> axis([-1 5 -1 3]), hold on
```



En (numerisk) lösning får vi enligt följande:

```
>> f=@(t,u)A*u;
>> u0=[2.9;2.6];
>> [t,U]=ode45(f,[0 5],u0);
>> plot(U(:,1),U(:,2),'r','LineWidth',2)
```

Vi ser hur lösningen $\mathbf{u}(t)$ följer fältets riktning i figuren ovan till höger. Där har vi även ritat ut lösningar för några andra begynnelsevillkor.

Uppgift 1. Betrakta begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), & 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

Rita riktningsfält och fasporträtt då

(a). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, $T = 5$.

(b). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$, $T = 7$.

3 Egenvärdesmetoden

Antag att \mathbf{A} är en diagonaliserbar 2×2 -matris med en bas av egenvektorer \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 och med tillhörande egenvärden λ_1 respektive λ_2 . Då ges lösningen till

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), & 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

av formeln

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

där koefficienterna c_1 och c_2 bestäms av startvärdena \mathbf{u}_0 .

Vi sätter $t = 0$ och får

$$\mathbf{u}(0) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Detta visar att

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{u}_0, \quad (\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0),$$

där matrisen $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]$ (kolonnerna är egenvektorerna till matrisen \mathbf{A}).

Som exempel ser vi åter på

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}, & 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

Med MATLAB löser vi egenvärdesproblemet och ritar lösning enligt

```
>> A=[4 -5;-2 1]; u0=[2.9;2.6]; T=10;
>> [V,D]=eig(A)
>> t=linspace(0,T);
>> c=V\u0;
>> U=c(1)*V(:,1)*exp(D(1,1)*t)+c(2)*V(:,2)*exp(D(2,2)*t);
>> plot(U(1,:),U(2,:),'r')
```

Vi beräknar alla egenvärden och egenvektorer med `eig` enligt `[V,D]=eig(A)`. Egenvärdena för matrisen \mathbf{A} hamnar längs diagonalen i \mathbf{D} och egenvektorerna blir kolonner i \mathbf{V} .

Lägg märke till hur vi bygger upp \mathbf{U} , vektorn \mathbf{t} är en radvektor och t.ex. $\mathbf{V}(:,1)$ är en kolonn så att $\mathbf{V}(:,1) * \exp(\mathbf{D}(1,1) * \mathbf{t})$ blir en matris. Längs första raden i \mathbf{U} , dvs. $\mathbf{U}(1,:)$, kommer $u_1(t)$ -värden finnas för de olika t -värden i vektorn \mathbf{t} och på andra raden, dvs. $\mathbf{U}(2,:)$, finner vi motsvarande $u_2(t)$ -värden.

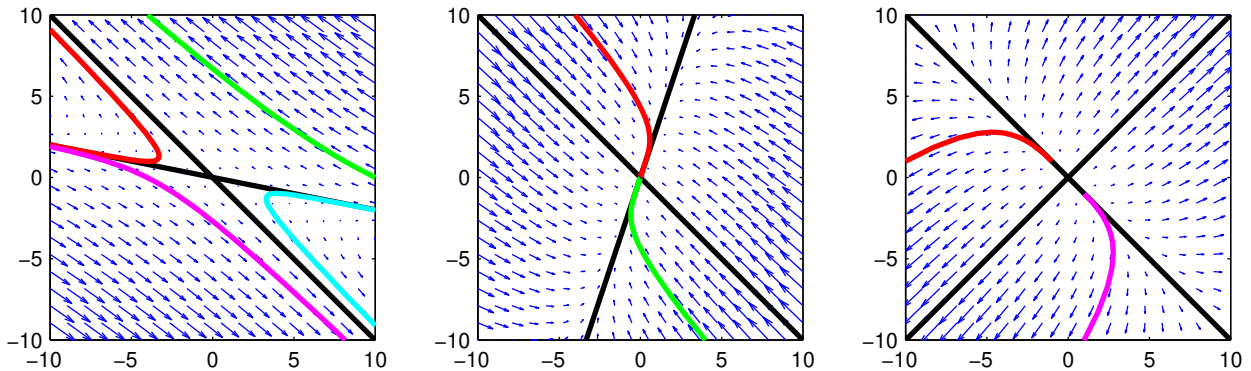
Uppgift 2. Undersök systemet $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t)$ för matriserna \mathbf{A} nedan. Rita i samma graf egenvektorerna till \mathbf{A} och jämför riktningsfältets egenskaper med egenvektorerna och motsvarande egenvärden. Förklara sambandet mellan riktningsfältet och matrisens egenvärden och egenvektorer.

Matriserna nedan har reella egenvärden. När utgör origo en *källa* (alla lösningar strömmar från origo), en *sänka* (alla lösningar strömmar till origo) eller en *sadelpunkt* (lösningarna går mot origo men avviker sedan)?

Rita också lösningen till differentialekvationen för några startvärden som ni hittar på själva. Använd ett lagom långt t -intervall.

(a). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (b). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (c). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

När egenvärdena är reella har egenvektorerna en speciell betydelse (förutom att de bygger upp lösningarna). Om vi ritat linjer genom origo i egenvektorernas riktning får vi en uppdelning av fasplanet i sektorer ut från origo. En lösningskurva kan aldrig korsa en uppdelningslinje, den blir alltid kvar i samma sektor.



Här ovan har vi ritat dessa egenvektorslinjer, som delar upp i sektorer, för matriserna från uppgiften ovan.

Uppgift 3. Undersök systemet $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t)$ för matriserna \mathbf{A} nedan. Nu har vi komplexa egenvärden så origo kommer vara en *spiralpunkt* (lösningarna går i spiral kring origo).

Rita riktningsfältet tillsammans med lösningen till differentialekvationen för några startvärden som ni hittar på själva.

(a). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$ (b). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$