Egenvärdesmetoden

Linjära system av ODE

Vi har i tidigare kurser i matematik sett något på allmäna system av differentialekvationer med begynnelsevillkor

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), \ a \leq t \leq b \\ \mathbf{u}(a) = \mathbf{u}_a \end{cases}$$

Nu skall vi studera lösningar till linjära system av differentialekvationer

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}, \ 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

där $\mathbf{A}$ är en konstant matris och $\mathbf{u}_0$ är en konstant vektor. Sambandet mellan $\mathbf{f}$ och matrisen $\mathbf{A}$ ges av:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

Det är enkelt att lösa det linjära systemet i MATLAB med

```
>> f=@(t,u)A*u
>> [t,U]=ode45(f,[0,T],u0)
```

Till skillnad från de flesta icke-linjära system så kan vi lösa de linjära systemen analytiskt (dvs. exakt) med *egenvärdesmetoden*.

Riktningsfält och fasporträtt

För att få en lite bättre uppfattning av vilka egenskaper systemet $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$ har så skall vi titta närmare på högerledet: $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$. Funktionen $\mathbf{F}$ är exempel på en vektorvärd funktion och kallas *vektorfält*.

För varje initialvärde till $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t)$ så har vi en (okänd) lösning $\mathbf{u}(t)$. Från differentialekvationen har vi

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$$

Vektorfältet $\mathbf{F}$ ger oss i varje punkt $\mathbf{u}$ den riktning i vilken lösningen förändras och dess längd förändringstakten. Genom att i ett lämpligt antal punkter $\mathbf{u}$ markera styrka och riktning för vektorn $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ med en pil så får vi ett så kallat *riktningsfält*.

Genom att rita upp detta riktningsfält får vi ungefärlig information om hur lösningen $\mathbf{u}(t)$ till ekvationen beter sig för samtliga möjliga startvärden. Vi kan alltså skapa kurvan $\mathbf{u}(t)$ genom att sätta pennan på den startpunkt vi önskar och sedan följa pilarna.

För att rita vektorfält i planet använder vi kommandot `quiver`. Men först måste vi skapa ett gitter (grid) med de punkter i vilka vi vill sätta ut pilar (som beskriver vektorfältets storlek och riktning i respektive punkt).

Om vi som exempel tar $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (u_1 - u_2,\ u_1 u_2)$ kan vi rita riktningsfältet enligt

```
>> u1=linspace(-2,2,30); u2=linspace(-2,2,30);
>> [U1,U2]=meshgrid(u1,u2);
>> F1=@(u1,u2)u1-u2; F2=@(u1,u2)u1.*u2; s=1.2;
>> quiver(U1,U2,F1(U1,U2),F2(U1,U2),s)   % s - skalfaktor som förlänger pilarna.
>> axis([-2 2 -2 2])
```

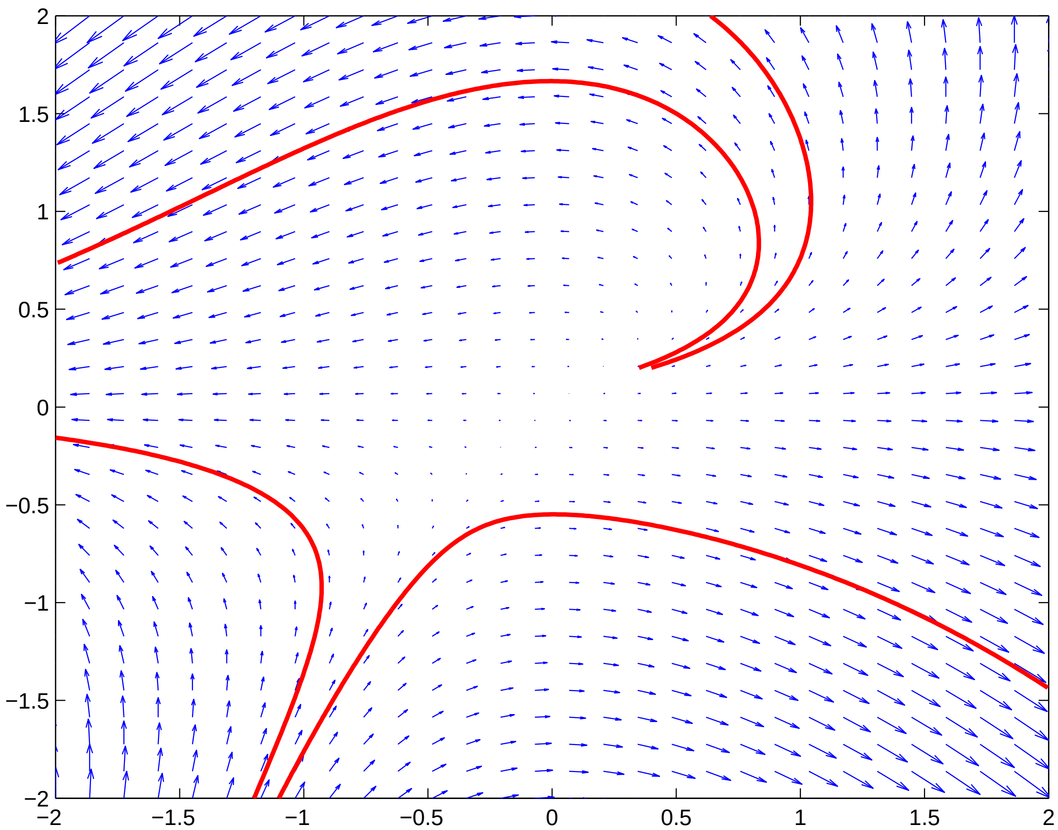
Vi kan också lägga till några *strömlinjer* (lösningsbanor) med funktionen `streamline`, som bygger på approximationen

$$\mathbf{u}(t+h) \approx \mathbf{u}(t) + h\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}(t) + h\mathbf{F}(\mathbf{u})$$

vilket är den så kallade Euler framåtmetoden på systemet $\mathbf{u}' = \mathbf{F}(\mathbf{u})$.

```
>> s1=[-1.2 -1.1 0.35 0.4];    % Första-koordinater för fyra startpunkter
>> s2=[-2 -2 0.2 0.2];         % och deras andra-koordinater
>> h=streamline(U1,U2,F1(U1,U2),F2(U1,U2),s1,s2)
>> set(h,'Color','r','LineWidth',2)
```

och får en bild där pilarnas riktning visar fältets riktning.



Ytterligare ett exempel tar vi: Vi löser

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u},\ 0 \le t \le T \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

där

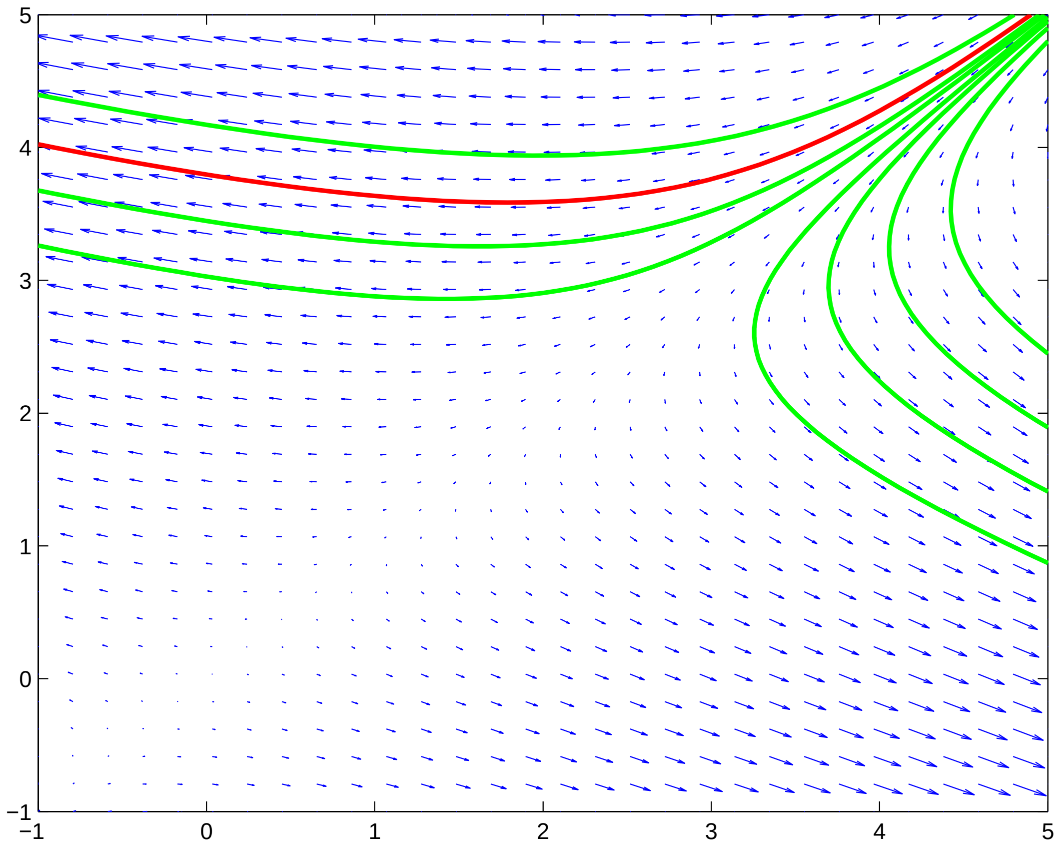
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 4.9 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

En (numerisk) lösning får vi enligt

```
>> A=[4 -5;-2 1]; u0=[4.9;5.0];
>> F=@(t,u)A*u;
>> [t,U]=ode45(F,[0 10],u0);
```

Tidigare har vi främst ritat ut graferna för koordinatfunktionerna $u_1(t)$ och $u_2(t)$, men det är också naturligt att visualisera lösningen i ett så kallat *fasporträtt* där vi ritar $u_1(t)$ mot $u_2(t)$. Vi ritar in några sådana kurvor (banor) i ett riktningsfält:

```
>> u1lim=[-1 5];
>> u2lim=[-1 5];
>> u1=linspace(u1lim(1),u1lim(2),30); u2=linspace(u2lim(1),u2lim(2),30);
>> [U1,U2]=meshgrid(u1,u2);
>> F1=A(1,1)*U1+A(1,2)*U2; F2=A(2,1)*U1+A(2,2)*U2;
>> quiver(U1,U2,F1,F2,0.9)
>> axis([u1lim u2lim]), hold on
>> plot(U(:,1),U(:,2),'r','LineWidth',2)
```



Vi ser hur lösningarna $\mathbf{u}(t)$ följer fältets riktning.

Uppgift 1. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}, \ 0 \le t \le T \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

Rita riktningsfält och fasporträtt då

(a). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $T = 5$ **(b).** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $T = 6$

Egenvärdesproblem

Vi kan med Matlab lösa egenvärdesproblem

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$$

där $\mathbf{A}$ är en kvadratisk matris, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ är en egenvektor och talet λ är ett egenvärde.

Låt oss som exempel se på matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 7 & -2 \\ 8 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi beskriver matrisen och beräknar egenvärdena med

```
>> A=[5 1 3 7;1 -2 1 9;4 2 7 -2;8 3 5 1];
>> d=eig(A)
d =
   13.8499
   -6.5856
   -0.6652
    4.4009
```

Vill vi även ha med egenvektorerna gör vi

```
>> [V,D]=eig(A)
V =
   -0.6229   -0.2506   -0.3823    0.4812
   -0.3991   -0.8316    0.9071    0.3053
   -0.3052    0.2585    0.0087   -0.7826
   -0.5997    0.4228    0.1760    0.2506


D =
   13.8499         0         0         0
         0   -6.5856         0         0
         0         0   -0.6652         0
         0         0         0    4.4009
```

Vi kommer då finna egenvektorerna som kolonner i matrisen `V` med motsvarande egenvärden på diagonalen i diagonalmatrisen `D`. T.ex. tredje egenvektorn ges av `V(:,3)` och tillhörande egenvärde ges av `D(3,3)`.

Vi kontrollerar att $\mathbf{AV} = \mathbf{VD}$ (vilket vi ju vet alltid gäller)

```
>> A*V-V*D
ans =
   1.0e-13 *
         0   -0.0844    0.0416    0.0266
         0   -0.0711    0.0522    0.0067
   -0.0355   -0.0488    0.0016    0.0400
   -0.0711   -0.1288    0.0276    0.0666
```

I det här fallet gäller dessutom att $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV} = \mathbf{D}$, dvs. matrisen $\mathbf{A}$ är diagonaliserbar.

```
>> V\A*V
ans =
   13.8499    0.0000   -0.0000   -0.0000
   -0.0000   -6.5856   -0.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0000   -0.6652    0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0000    4.4009
```

Egenvärdesmetoden

Antag att $\mathbf{A}$ är en diagonaliserbar 2×2-matris med en bas av egenvektorer $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ och med tillhörande egenvärden λ_1 respektive λ_2. Då ges lösningen

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{Au}, \; 0 \le t \le T \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

av formeln

$$\mathbf{u}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

där koefficienterna c_1 och c_2 bestäms av startvärdena. Vi sätter $t = 0$ och får

$$\mathbf{u}(0) = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Detta visar att

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}_0, \quad (\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0),$$

där matrisen $\mathbf{V} = [\, \mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2 \,]$ (kolonnerna är egenvektorerna till matrisen $\mathbf{A}$).

Uppgift 2. Undersök system $\mathbf{u}' = \mathbf{Au}$ för matriserna $\mathbf{A}$ nedan. Rita i samma graf egenvektorerna till $\mathbf{A}$ och jämför riktningfältets egenskaper med egenvektorerna och motsvarande egenvärden.

Förklara sambandet mellan riktningsfältet och matrisens egenvärden och egenvektorer.

När utgör origo en *källa* (alla lösningar strömmar från origo), en *sänka* (alla lösningar strömmar till origo), en *sadelpunkt* (lösningarna går mot origo men avviker sedan) eller en *spiralpunkt* (lösningarna går i spiral kring origo)?

Den som inte orkar beräkna alla egenvärden och egenvektorer för hand kan använda kommandot `eig` som gör detta. Med `[V,D]=eig(A)` hamnar egenvärdena för matrisen $\mathbf{A}$ längs diagonalen i `D` och egenvektorerna blir kolonner i `V`.

Rita också lösningen till differentialekvationen för några startvärden som ni hittar på själva.

(a). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **(b).** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ **(c).** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(d). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$ **(e).** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$