Egenvärdesproblem

1 Inledning

Vi skall lösa egenvärdesproblem för matriser. Sedan skall vi se på egenvärdesproblem för differentialekvationer med randvärden.

2 Egenvärdesproblem för matriser

Vi skall se hur man i MATLAB löser egenvärdesproblemet $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ för matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 9 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi beskriver matrisen och beräknar egenvärden samt egenvektorer med

```
>> A=[5 1 7; 1 -2 9; 8 3 1];
>> [V,D]=eig(A)
V =
     -0.66688     -0.37769     -0.22509
     -0.43616      0.90902     -0.82741
     -0.60418      0.17615      0.51451
D =
       11.996            0            0
            0      -0.6715            0
            0            0     -7.32449
```

Vi kommer då finna egenvektorerna som kolonner i matrisen `V` med motsvarande egenvärden på diagonalen i diagonalmatrisen `D`. T.ex. tredje egenvektorn ges av `V(:,3)` med tillhörande egenvärde ges av `D(3,3)`.

Vi kontrollerar att $\mathbf{Av}_3 = \lambda_3\mathbf{v}_3$ genom att bilda

```
>> r=A*V(:,3)-D(3,3)*V(:,3)
r =
  -6.6613e-16
            0
            0
```

som i praktiken är nollvektorn.

Uppgift 1. Beräkna egenvektorer och egenvärden till följande matriser. Kontrollera genom insättning att beräkningarna är korrekta.

(a). $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ **(b).** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **(c).** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

3 Egenvärdesproblem för differentialekvationer

I förra laborationen såg vi på ett värmeledningsproblem som beskrevs av ett randvärdesproblem för ordinär differentialekvation

$$\begin{cases} -cu''(x) = f(x),\ 0 \le x \le L \\ u(0) = g_0,\ u(L) = g_L \end{cases}$$

där g_0 och g_L är temperaturen i stavens ändpunkter, c är stavens värmeledningsförmåga och $f(x)$ är värmekällan.

Detta var ett specialfall av *linjära* randvärdesproblem, dvs. sådana problem som kan skrivas

$$\begin{cases} u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x),\ x_a \le x \le x_b \\ u(x_a) = u_a,\ u(x_b) = u_b \end{cases}$$

Nu skall vi se på linjära *egenvärdesproblem* för ordinär differentialekvation

$$\begin{cases} u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = \lambda u(x),\ x_a \le x \le x_b \\ u(x_a) = u(x_b) = 0 \end{cases}$$

De lösningar $u(x)$ vi söker är skilda från nollfunktionen (dvs. $u(x)$ är inte 0 för alla x) och kallas *egenfunktioner* och talen λ kallas *egenvärden* precis som för matrisproblemen.

Som exempel har

$$\begin{cases} u''(x) = \lambda u(x),\ 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

följande egenfunktioner och motsvarande egenvärden

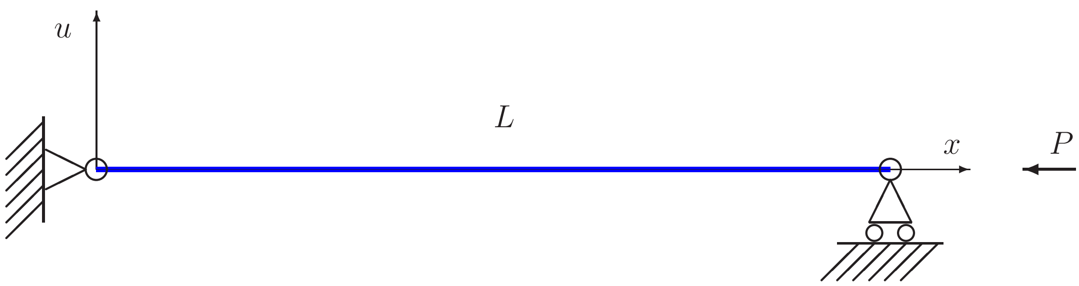
$$u_k(x) = B_k \sin(k\pi x),\quad \lambda_k = -k^2\pi^2,\quad k = 1, 2, \cdots$$

Lägg märke till att vi har oändligt många lösningar.

Som exempel på tillämpning tar vi: *Euler knäckning.* Utböjningen u hos en ledlagrad stav av längd L som belastas med lasten P beskrivs av följande egenvärdesproblem för ordinär differentialekvation

$$\begin{cases} -EI\,u'' = Pu,\ 0 < x < L \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

där EI är böjstyvheten.



Vi kan skriva upp en formel för lösningen, men om böjstyvheten inte konstant skulle det vanligtvis inte gå. Därför skall vi använda samma metod som för värmeledningsproblemet, dvs. ersätta derivator med differenskvoter. Detta leder till ett egenvärdesproblem för matris.

Vi inför en indelning $x_i = ih$, $i = 0, 1, \cdots, n+1$ av intervallet $0 \le x \le L$, med $h = \frac{L}{n+1}$.
Sedan ersätter vi $u'(x_i)$ i differentialekvationen med differenskvoten

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$$

i de inre punkterna $x_i, i = 1, \cdots, n$, och får

$$-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1}) = h^2 \tfrac{P}{EI} u(x_i) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Låter vi u_i beteckna approximationen av $u(x_i)$ får vi

$$\begin{cases} -u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = h^2 \frac{P}{EI} u_i, & i = 1, 2, \cdots, n \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Med matriser kan detta skrivas

$$\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u}$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \lambda = h^2 \frac{P}{EI}$$

Egenvektorns olika komponenter u_i kommer beskriva vertikala förskjutningen hos staven, från neutralläget, för de olika x_i-värdena. Från egenvärdena λ får vi de kritiska lasterna P. (Hur?)

Uppgift 2. Lös egenvärdesproblemet för $L = 1$ och $EI = 1$ genom att lagra matrisen som en gles matris med `spdiags` och lösa med `eigs`, den glesa varianten av `eig`. Bestäm de tre minsta egenvärdena och motsvarande kritiska laster, samt rita ut egenvektorerna, motsvarande förskjutningarna av staven för respektive kritisk last. Läs först hjälptexten för `eigs`. Tag $n = 50$.