Tillämpningar av integraler

1 Inledning

Vi skall se på några tillämpningar av integraler. Först ser vi på längden av grafer. Därefter ser vi på rotationskroppar och beräknar deras mantelarea och inneslutna volym. Denna laboration är mycket kort så att ni även skall hinna handräkna ordentligt.

2 Kurvlängd

Längden av en graf till en funktion $f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$ ges av (Stewart kapitel 8.1)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Som exempel beräknar vi längden av grafen till $f(x) = \sin(x)$ över intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$.

```
>> f=@(x)sin(x); a=0; b=2*pi;
>> Df=@(x)cos(x);
>> x=linspace(a,b);
>> plot(x,f(x))
>> s=integral(@(x)sqrt(1+Df(x).^2),a,b)
s =
    7.6404
```

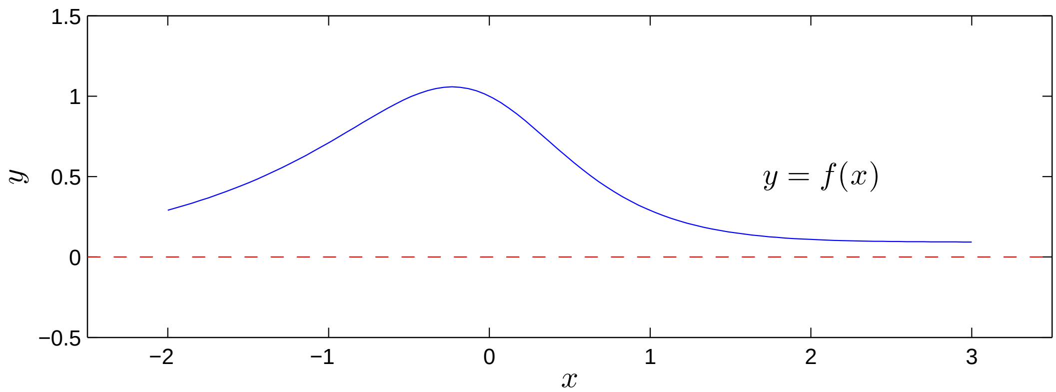
Uppgift 1. Beräkna längden av grafen av $f(x) = x\sin(x)$ över intervallet $0 \leq x \leq 4\pi$.

3 Rotationskroppar

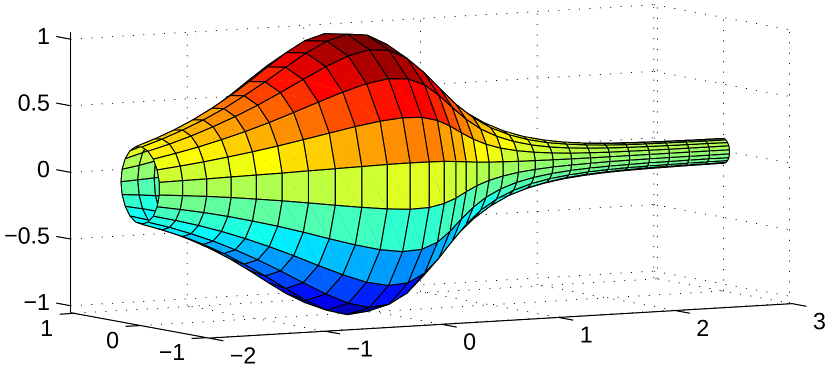
Betrakta kurvan som ger grafen av en funktion $y = f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$. Som exempel kan vi ta

$$f(x) = \frac{1 - 0.5\,\sin(x)}{1 + x^2}, \quad -2 \leq x \leq 3$$

Så här ser kurvan ut



Låter vi denna kurva rotera runt x-axeln får vi en rotationsyta



och vi vill beräkna den inneslutna volymen samt mantelarean.

Volymen som begränsas av rotationsytan ges av (Stewart kapitel 6.2)

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

och mantelarean ges av (Stewart kapitel 8.2)

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

För vårt exempel nöjer vi oss med en numerisk beräkning av volymen V och mantelarean S enligt

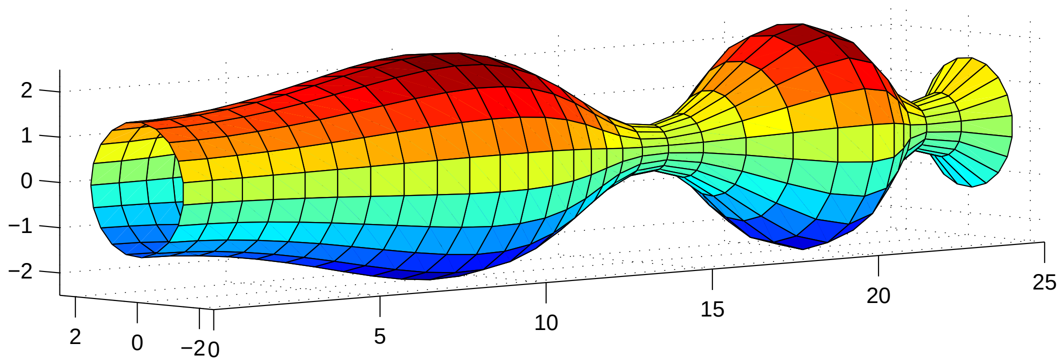
```
>> f=@(x)(1-0.5*sin(x))./(1+x.^2);
>> Df=@(x)-0.5*cos(x)./(1+x.^2)-(1-0.5*sin(x))*2.*x./(1+x.^2).^2;
>> a=-2; b=3;
>> V=pi*integral(@(x)f(x).^2,a,b)
V =
    5.1095
>> S=2*pi*integral(@(x)abs(f(x)).*sqrt(1+Df(x).^2),a,b)
S =
   16.3260
```

Uppgift 2. Beräkna volymen som innesluts av rotationsytan som bildas då grafen till

$$f(x) = 1.5 + \sin(0.02\,x^2), \quad 0 \le x \le 25$$

roterar runt x-axeln. Även mantelarean skall beräknas.

Så här ser ytan ut

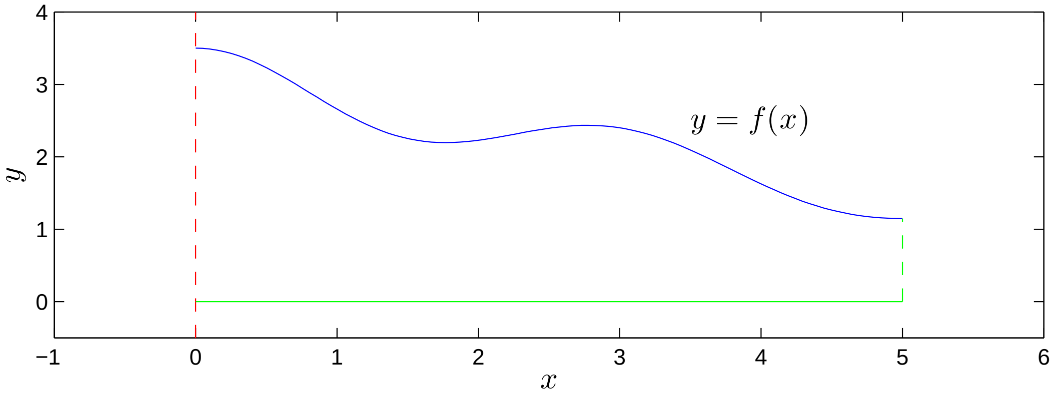


Om du vill rita upp en rotationsyta kan du hämta funktionen `rotationsyta` som ligger på kurshemsidan och använda den.

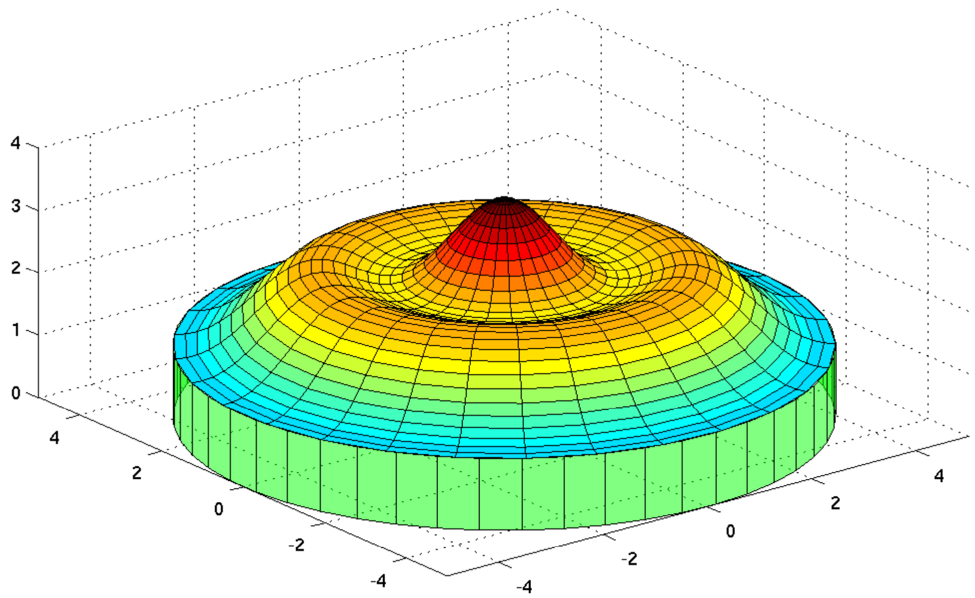
Betrakta kurvan som ger grafen av en funktion $y = f(x)$ över ett intervall $0 \leq a \leq x \leq b$. Som exempel kan vi ta

$$f(x) = \frac{3 + 0.5\,\sin(\pi/2 + 2x)}{1 + 0.05x^2}, \quad 0 \leq x \leq 5$$

Så här ser kurvan ut



Låter vi denna kurva rotera runt y-axeln får vi en rotationsyta



och vi vill beräkna den inneslutna volymen (mellan ytan och horisontella planet som ges av $y = 0$) samt mantelarean.

Volymen ges i vårt fall av (Stewart kapitel 6.2)

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

och mantelarean ges av (Stewart kapitel 8.2)

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Vi beräknar integralerna enligt

```
>> f=@(x)(3+0.5*sin(pi/2+2*x))./(1+0.05*x.^2);
>> Df=@(x)cos(pi/2+2*x)./(1+0.05*x.^2)...       % Fortsätter på nästa rad
       -0.1*x.*(3+0.5*sin(pi/2+2*x))./(1+0.05*x.^2).^2;
>> a=0; b=5;
>> V=2*pi*integral(@(x)x.*f(x),a,b)
V =
  150.1175
>> S=2*pi*integral(@(x)x.*sqrt(1+Df(x).^2),a,b)
S =
   91.6250
```

Uppgift 3. Beräkna volymen som innesluts av rotationsytan som bildas då grafen till

$$f(x) = 1 - \frac{\sin(5x)}{x}, \quad 1 \le x \le \pi$$

roterar runt y-axeln. Även mantelarean skall beräknas.