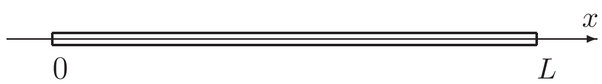
Värmeledningsekvationen

1 Inledning

Vi skall se på numerisk lösning av en partiell differentialekvation som beskriver värmeledning i en stav. För det stationära problemet kommer vi använda differensapproximationer vilket ger ett linjärt ekvationssystem, som vi sedan löser. För det tidsberoende problemet kommer vi använda den s.k. linjemetoden som leder till system av ordinära differentialekvationer, som vi sedan löser med en ODE-lösare.

Vi skall närmare bestämt se på värmeledning i en längs mantelytan isolerad stav med en inre värmekälla



Vid stationärt tillstånd ges temperaturen $u(x)$ som lösningen till följande randvärdesproblem för ordinära differentialekvation

$$\begin{cases} -cu'' = f, \ 0 \leq x \leq L \\ u(0) = g_0, \ u(L) = g_L \end{cases}$$

där g_0 och g_L är temperaturen i stavens ändpunkter, c är stavens termiska diffusivitet och $f(x)$ är en värmekälla.

Vi skall också se på hur temperaturen hos staven förändras med tiden, vilket beskrivs av följande partiella differentialekvation med både rand- och begynnelsevillkor

$$\begin{cases} u'_t = cu''_{xx} + f, \ 0 \leq x \leq L, \ t > 0 \\ u(0,t) = g_0, \ u(L,t) = g_L, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_{beg}(x), \ 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Här är $u_{beg}(x)$ begynnelsetemperaturen i staven och vi kommer se hur temperaturen $u(x,t)$ utvecklas mot det stationära tillståndet.

2 Stationärt problem

Vi börjar med att se på stationärt tillstånd. Då har vi bara en variabel, rumsvariabeln x, och temperaturen $u(x)$ beskrivs av följande randvärdesproblem för andra ordningens differentialekvation

$$\begin{cases} -cu''(x) = f(x), \ 0 \leq x \leq L \\ u(0) = g_0, \ u(L) = g_L \end{cases}$$

där g_0 och g_L är temperaturen i stavens ändpunkter, c är stavens termiska diffusivitet och $f(x)$ är värmekällan.

Inför en indelning $x_i = ih$, $i = 0, 1, \cdots, n+1$ av intervallet $0 \leq x \leq L$, med $h = \frac{L}{n+1}$.

Om vi i differentialekvationen ersätter $u''(x_i)$ med differenskvoten (se separat text)

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$$

i de inre punkterna $x_i, i = 1, \cdots, n$, får vi

$$-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1}) = \tfrac{h^2}{c} f(x_i) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Dessa linjära ekvationer ger sambandet mellan temperaturer på olika ställen på staven.

Låter vi u_i beteckna approximationer av $u(x_i)$ och utnyttjar randvillkoren $u(0) = g_0,\ u(L) = g_L$ kan vi med matriser skriva detta $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b}$ där

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{c} f(x_1) + g_0 \\ \frac{h^2}{c} f(x_2) \\ \vdots \\ \frac{h^2}{c} f(x_{n-1}) \\ \frac{h^2}{c} f(x_n) + g_L \end{bmatrix}$$

Matrisen $\boldsymbol{A}$ är en *bandmatris* (den kallas också för en tridiagonal matris) och vi bildar den med `spdiags`. Vi bildar först en vektor fylld med 1:or, därefter placerar vi in denna vektor (multiplicerad med 2 respektive -1) som diagonaler med `spdiags` enligt

```
>> n=30; ett=ones(n,1);
>> A=spdiags([-ett 2*ett -ett],[-1 0 1],n,n);
```

Diagonalerna sätts ihop som kolonner i en matris med `[-ett 2*ett -ett]`, de måste därför vara lika långa. Kolonnerna placeras som diagonaler i ordningen som ges av vektorn `[-1 0 1]` och det hela skall bli en $n \times n$-matris, därav `n,n` allra sist.

När vi har bildat högerledsvektorn $\boldsymbol{b}$ löser vi med backslash (\). När matrisen är lagrad som gles matris känner MATLAB av att det och lösningen av ekvationssystemet görs effektivt med metoder som tar vara på gleshetsstrukturen. Vi kompletterar lösningen med randvillkoren och ritar upp den.

Uppgift 1. Låt $c = 2$, $L = 1$, $g_0 = 40$, $g_L = 60$ samt $f(x) = 200\,\exp(-(x - \frac{L}{2})^2)$. Lös det stationära värmeledningsproblemet och rita upp lösningen. Tag $n = 30$.

3 Tidsberoende problem

Vi ser på den tidsberoende värmeledningsekvationen med rand- och begynnelsevärden

$$\begin{cases} u'_t = cu''_{xx} + f(x),\ 0 < x < L,\ 0 < t < T \\ u(0,t) = g_0,\ u(L,t) = g_L,\ 0 < t < T \\ u(x,0) = u_{beg}(x),\ 0 < x < L \end{cases}$$

På samma sätt som för stationära problemet inför vi en indelning av intervallet $0 \le x \le L$ och ersätter u''_{xx} med differensapproximationer.

Låter vi $u_i(t)$ beteckna approximationer av $u(x_i, t)$ får vi följande begynnelsevärdesproblem för ODE-system

$$\begin{cases} u_i'(t) = \frac{c}{h^2}(u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)) + f(x_i),\ i = 1, \cdots, n,\ 0 < t < T \\ u_0(t) = g_0,\ u_{n+1}(t) = g_L,\ 0 < t < T \\ u_i(0) = u_{beg}(x_i),\ i = 1, \cdots, n \end{cases}$$

eller med matrisbeteckningar

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}'(t) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{U}),\ 0 < t < T \\ \boldsymbol{U}(0) = \boldsymbol{U}_0 \end{cases}$$

där $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{U}) = -\frac{c}{h^2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}(t) + \boldsymbol{b}(t)$.

Här är $\boldsymbol{A}$ samma matris som i stationära fallet (därav minustecknet framför $\frac{c}{h^2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}(t)$) och

$$\boldsymbol{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}(t) \\ u_n(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} \frac{c}{h^2}g_0 + f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ \frac{c}{h^2}g_L + f(x_n) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{U}_0 = \begin{bmatrix} u_{beg}(x_1) \\ u_{beg}(x_2) \\ \vdots \\ u_{beg}(x_{n-1}) \\ u_{beg}(x_n) \end{bmatrix}$$

Vi löser begynnelsevärdesproblemet med en ODE-lösare och ritar upp lösningar på lämpligt sätt.

Uppgift 2. Låt $c = 2$, $L = 1$, $g_0 = 40$, $g_L = 60$ samt $f(x) = 200\,\exp(-(x - \frac{L}{2})^2)$. Tag tidsintervallet $0 \leq t \leq 0.7$ och begynnelsetemperaturen $u_{beg}(x) = 5$. Använd linjemetoden. Lös ODE-systemet med `ode45` och gör en visualisering av tidsförloppet med `contourf` och `surf`. Tag $n = 30$.

Jämför med lösningen till stationära problemet. Kommer vi se hur temperaturen $u(x, t)$ utvecklas mot det stationära tillståndet?