Differensapproximationer

Vi skall approximera derivator $u'(x)$, $u''(x)$, $\cdots$, genom att använda funktionsvärden i närheten av x. Precis som vid definitionen av derivator använder vi differenskvoter. Då lät vi $h \to 0$, nu kommer vi ta h som ett litet positivt tal.

Vi kan approximera derivatan $u'(x)$ med *framåt-* och *bakåtdifferenskvoterna*

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \quad \text{och} \quad u'(x) \approx \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$$

Låter vi $h \to 0$ så får vi derivatan $u'(x)$. Tar vi h som ett litet positivt tal så får vi en approximation av derivatan. Felet i approximationen halveras om vi halverar h.

Med en *centraldifferenskvot*

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$$

får vi en noggrannare approximation av derivatan $u'(x)$. Felet i approximationen delas med fyra om vi halverar h.

Vi kan approximera $u''(x)$ med en *centraldifferenskvot* för andraderivatan

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$$

och även här gäller att felet delas med fyra om vi halverar h.

På motsvarande sätt kan vi approximera derivator av ännu högre ordning.

Differensapproximationer av partiella derivator får vi genom att bilda differenskvoter i repektive variabel. T.ex. $u'_x(x,t)$ kan approximeras av *framåt-*, *bakåt-* och *centraldifferenskvoterna*

$$u'_x(x,t) \approx \frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}, \quad u'_x(x,t) \approx \frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}$$

$$u'_x(x,t) \approx \frac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h}$$

där h som ett litet positivt tal.

För andraderivaton $u''_{xx}(x,t)$ använder vi centraldifferenskvoten

$$u''_{xx}(x,t) \approx \frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}$$

där h ett litet positivt tal.

När vi löser värmeledningsproblemet använder vi centraldifferenskvoterna som approximation av derivatorna $u''(x)$ och $u''_{xx}(x,t)$.